

UNIVERSITE LIBRE DE BRUXELLES

Faculté des Sciences Appliquées

Service des Milieux Continus



MESURE DE CHAMPS DE VITESSE  
D' ECOULEMENTS FLUIDES PAR ANALYSE  
DE SUITES D' IMAGES OBTENUES PAR  
DIFFUSION D' UN FEUILLET LUMINEUX

Roland MEYNART

Octobre 1983

Mémoire présenté en  
vue de l' obtention du  
grade de Docteur en  
Sciences Appliquées

UNIVERSITY OF CALIFORNIA LIBRARY

1000 UNIVERSITY AVENUE

BERKELEY, CALIFORNIA 94720



UNIVERSITY OF CALIFORNIA LIBRARY

1000 UNIVERSITY AVENUE

BERKELEY, CALIFORNIA 94720

UNIVERSITY OF CALIFORNIA LIBRARY

UNIVERSITY OF CALIFORNIA LIBRARY

UNIVERSITY OF CALIFORNIA LIBRARY

1000 UNIVERSITY AVENUE

BERKELEY, CALIFORNIA 94720

UNIVERSITY OF CALIFORNIA LIBRARY

*Un travail de ce genre ne peut être réalisé que grâce à la collaboration d' un certain nombre de personnes et d' institutions. C'est pourquoi je voudrais exprimer ma reconnaissance à tous ceux qui m' ont soutenu et aidé pendant ces dernières années.*

*Rien n' aurait sans doute été possible sans le soutien du Fonds National de la Recherche Scientifique qui m' a fait confiance pendant quatre ans. Les professeurs Kestens et Ebbeni ont bien voulu m' accueillir dans leur service et me prodiguer continuellement leurs conseils. Que le professeur Kestens soit remercié pour sa disponibilité et le professeur Ebbeni pour m' avoir suggéré le sujet de ce travail et pour n' avoir jamais été avare de ses intuitions optiques.*

*Les longues heures de discussion passées avec le prof. J.P. Boon m' ont toujours apporté beaucoup d' éclaircissements. Merci aussi pour le prêt occasionnel de son matériel.*

*L' Institut Von Karman de Dynamique des Fluides a eu une grande part dans l' accomplissement de ce travail. Que le professeur Ginoux accepte mes remerciements pour m' avoir permis de collaborer avec l' Institut. Les profs. Olivari, Buchlin et Riethmiller ont toujours montré un grand intérêt pour mon travail et m' ont toujours conseillé à bon escient.*

*Que le personnel technique du service des Milieux Continus et de l' Institut Von Karman soit remercié pour m' avoir aidé dans la réalisation de mes montages. Tout aussi importante a été la contribution de mes camarades et complices du personnel scientifique du service des Milieux Continus, qui ont réussi à créer et à maintenir une ambiance détendue au cours de ces années.*

*Enfin, je voudrais remercier ma secrétaire personnelle et unique pour avoir tapé la plus grande partie du manuscrit.*

The following information was obtained from the records of the  
Department of the Interior, Bureau of Land Management, on  
the subject of the proposed acquisition of land for the  
establishment of a national monument in the State of  
California. The land in question is situated in the  
County of San Diego, and is owned by the State of  
California. The proposed acquisition is for the purpose  
of establishing a national monument to preserve the  
natural resources and scenic beauty of the area.  
The land is situated in the County of San Diego,  
State of California, and is owned by the State of  
California. The proposed acquisition is for the purpose  
of establishing a national monument to preserve the  
natural resources and scenic beauty of the area.  
The land is situated in the County of San Diego,  
State of California, and is owned by the State of  
California. The proposed acquisition is for the purpose  
of establishing a national monument to preserve the  
natural resources and scenic beauty of the area.

## TABLE DES MATIERES

<u>INTRODUCTION</u>	0.1
<u>CHAPITRE I : TECHNIQUES DE VISUALISATION ET DE VELOCIMETRIE SPATIALE</u>	
1. Introduction	I.1
2. Techniques de visualisation	I.1
2.1 Techniques liées aux fluctuations d' indice de réfraction	I.1
2.2 Techniques basées sur l' introduction de traceurs	I.3
3. Vélocimétrie spatiale	I.4
3.1 Introduction	I.4
3.2 Analyse de trajectoires	I.5
3.3 Analyse de successions de points	I.6
3.4 Techniques holographiques	I.8
3.5 Techniques spéciales	I.9
4. Conclusions	I.10
Figures du chapitre I	I.12
<u>CHAPITRE II : VELOCIMETRIE ET SPECKLE: INTRODUCTION GENERALE</u>	
1. Introduction: optique cohérente et transformée de Fourier	II.1
1.1 Analyse spectrale-Application à la recherche de périodicités	II.2
2. Le speckle	II.4
2.1 Définitions et propriétés	II.4
2.2 Speckle: applications	
2.2.1 Photographie des speckles	II.7
2.2.2 Speckle en astronomie	II.8
3. Application des techniques de speckle en mécanique des fluides	
3.1 Application aux photographies de champs de particules	II.9
3.2 Application aux hologrammes de champs de particules	II.10
Figures du chapitre II	II.12

## CHAPITRE III : ENREGISTREMENT DES CLICHES

1. Illumination de l' écoulement	
1.1 Aspect spatial	III.1
1.1.1 Propagation d' un faisceau gaussien dans le vide	III.1
1.1.2 Propagation d' un faisceau gaussien à travers une lentille	III.3
1.1.3 Aberrations chromatiques	III.4
1.1.4 Aberrations géométriques	III.6
1.1.5 Les reflets	III.6
1.1.6 Exemple d' application	III.7
1.2 Aspect temporel	III.9
1.2.1 Modulation de lasers continus	III.9
1.2.2 Utilisation de lasers pulsés	III.10
2. Le dispositif photographique	III.11
2.1 Description et alignement	III.11
2.2 Résolution et profondeur de champ	III.12
2.3 Effets de perspective	III.13
3. Choix des particules	III.14
3.1 Comportement mécanique	III.14
3.2 Interaction lumière-particule	III.15
3.2.1 Propriétés de diffusion des particules	III.15
3.2.2 Pression de radiation	III.17
3.2.3 Diffusion multiple	III.18
Figures du chapitre III	III.20

## CHAPITRE IV : TECHNIQUES D' ANALYSE DES CLICHES

1. Eclairage ponctuel - Traitement des franges de Young	IV.1
1.1 Description des franges	IV.1
1.2 Traitement des franges en mécanique du solide	IV.3
1.3 Traitement des franges en mécanique des fluides	IV.6
1.3.1 Traitement des franges par moyennage unidimensionnel de l' intensité	IV.7
1.3.1.1 Introduction	IV.7
1.3.1.2 Moyennage et transformée de Fourier	IV.8
1.3.1.3 Amélioration de la résolution. Apport de l' exposition multiple	IV.12
1.3.1.4 Amélioration du rapport signal sur bruit	IV.14

1.3.1.5 Résumé, comparaison des méthodes et possibilités d'automatisation	IV.15
1.3.2 Traitement par autocorrélation	IV.17
1.3.2.1 Description	IV.17
1.3.2.2 Performances et limitations	IV.22
1.4 Acquisition et traitement des images	IV.23
1.4.1 Acquisition par balayage mécanique	IV.23
1.4.2 Acquisition par caméra vidéo et traitement en temps réel	IV.24
1.4.3 Précision des techniques d'analyse	IV.27
1.5 Effet d'un déplacement fini et de gradients de déplacement. Dynamique de mesure	IV.29
2. Eclairage global. Filtrage spatial	IV.32
Figures du chapitre IV	IV.36

#### CHAPITRE V : APPLICATION A LA MESURE D'ÉCOULEMENTS A BASSE VITESSE

1. Introduction: convection naturelle	V.1
2. Convection de Rayleigh-Bénard dans une cellule parallépipédique	V.3
3. Convection de Rayleigh-Bénard dans une cellule cylindrique	V.6
4. Conclusion	V.9
Figures du chapitre V	V.10

#### CHAPITRE VI : APPLICATION A L'ÉTUDE DE LA TRANSITION VERS LA TURBULENCE DANS UN JET AXISYMETRIQUE A FAIBLE NOMBRE DE REYNOLDS

1. Description moderne de la turbulence	
1.1 Introduction	VI.1
1.2 Structures à grande échelle: définitions et propriétés	VI.2
1.3 Structures à grande échelle: méthodes de mesure	VI.6
1.4 Exemples de structures	VI.9
1.5 Conclusion	VI.12
2. Le dispositif expérimental	VI.14
2.1 Conditions initiales du jet	VI.14
2.2 Ensemencement et dispositif optique	VI.16
2.3 Instabilité du jet	VI.18
2.3.1 Instabilité de la couche de cisaillement	VI.18
2.3.2 Description du comportement des rouleaux instables	VI.22

Une méthode viable de vélocimétrie se doit de satisfaire à deux exigences. D' une part, elle doit être simple et doit être capable de fournir des résultats en un temps acceptable pour l' utilisateur. D' autre part, elle doit montrer non seulement son efficacité dans des écoulements simples, mais aussi la possibilité de fournir des renseignements inédits dans des écoulements où les méthodes classiques ont atteint leurs limites. L'idéal est alors d' étudier des types de phénomènes où le nombre de questions en suspens et traitables par vélocimétrie spatiale est suffisamment important pour définir un cadre de recherche assez large. Le chapitre VI. est une tentative en ce sens.

L' exposé qui va suivre se veut le plus complet possible. On essaie d' y montrer comment concevoir un dispositif expérimental et comment traiter les données qu' il fournit afin d' obtenir un champ bidimensionnel instantané de la projection de la vitesse dans un plan. Enfin, un exemple probant d' application vient illustrer ces notions. Un exposé de ce genre ne peut jamais être entièrement original et les points cruciaux n' en ressortent pas toujours clairement. C' est pourquoi, dans les lignes qui vont suivre, on essaiera de retracer le cheminement logique de ce travail en insistant sur les points importants et originaux.

Le premier chapitre rappelle le principe des techniques de visualisation les plus utilisées et les améliorations qui ont été tentées pour en faire des techniques de vélocimétrie. Après avoir envisagé les problèmes de principe et défini une ébauche de solution, on expose, au chapitre II, ce qui a été fait en mécanique du solide pour résoudre des problèmes analogues. On introduit alors une notion fondamentale pour la compréhension de la suite: la granularité laser ou "speckle". Ces deux premiers chapitres sont destinés à faire comprendre, sans rentrer dans de grands détails, comment l' éclaircissement cohérent d' une photographie en multiple exposition d' un objet (au sens général du terme) en mouvement produit un système simple de franges que l' on peut envisager de traiter entièrement ou semi-automatiquement.

Une fois ce principe acquis, le chapitre III détaille les nombreux paramètres, optiques aussi bien que mécaniques ( comportement des particules ensemençant l' écoulement) qu' il convient d' optimiser pour réaliser une

prise de vue de qualité suffisante pour obtenir des franges de qualité. La majeure partie des calculs, qui ne sont que des rappels et dont la longueur alourdirait inutilement l'exposé, sont rejetés en annexe (A.I → A.V). Le vif du sujet est abordé au chapitre IV où les principes des techniques de traitement de franges ainsi que leur implantation pratique sont décrits. Après avoir rappelé les techniques utilisées en mécanique du solide et expliqué les problèmes que pose leur application à la dynamique des fluides, on envisage les modifications originales qu'il est nécessaire d'y apporter et on propose une méthode nouvelle permettant d'automatiser entièrement le dépouillement. Les performances et les limitations de ces techniques sont illustrées par des exemples réels obtenus au moyen des deux systèmes d'acquisition d'image utilisés dans ce travail. Les annexes relatives à ce chapitre décrivent un de ces montages (A.VII) et des calculs très longs et d'importance secondaire par rapport au propos principal du chapitre. Ces calculs, décrivant la statistique du speckle observé dans les franges (A.VI) ainsi que l'effet théorique des gradients de déplacement (A.VIII), sont originaux.

Le chapitre V a été inclus dans ce travail pour des raisons "historiques". Il relate les premières expériences simples de convection naturelle stationnaire ayant servi à mettre au point les techniques décrites aux chapitres III et IV. Enfin, le chapitre VI détaille l'application de la technique de vélocimétrie de speckle à l'étude de la transition vers la turbulence dans un jet circulaire non excité à faible nombre de Reynolds. Ce problème répond quasi idéalement aux exigences définies plus haut. Non seulement le problème général de la transition est très vaste et son intérêt évident, mais en plus ce type d'écoulement a suscité un très grand intérêt depuis quelques années par la découverte du concept de "structure à grande échelle". Ces structures, qui semblent apparaître dans un grand nombre d'écoulements transitionnels, ne sont répétitives qu'en moyenne et ne sont pas parfaitement reproductibles. On a pu en établir les propriétés "d'ensemble" par des techniques d'échantillonnage conditionnel (voir chapitre VI) de signaux ponctuels, mais nul n'a pu encore préciser le rôle individuel de ces structures, et ce à cause de l'indisponibilité d'une technique de vélocimétrie spatiale. L'exemple choisi comporte une séquence complète d'évènements caractéristiques de la formation de ces structures à grande échelle, à savoir la formation de rouleaux très organisés,

leur interaction et leur dégénérescence en structures à grande échelle turbulentes. En plus de leur intérêt propre, ces évènements-types offrent l'occasion de tester l'efficacité de la méthode dans des cas de plus en plus compliqués, de plus en plus désorganisés, jusqu'à atteindre les limites inhérentes à la technique. Les mesures qui sont présentées sont probablement les premières de ce genre et tentent d'apporter une contribution nouvelle à la description de la transition dans ce type d'écoulement.

## CHAPITRE I : TECHNIQUES DE VISUALISATION ET DE VELOCIMETRIE SPATIALE

### 1. INTRODUCTION

Les techniques ponctuelles de vélocimétrie les plus utilisées dans la "pratique de tous les jours" sont l'anémométrie à fil chaud et la vélocimétrie Doppler. La grande facilité d'emploi pour la première et l'absence de perturbation liée à une sonde pour la deuxième en font des instruments largement répandus. Néanmoins, on a encore très souvent recours à des visualisations d'ensemble si on veut avoir une vue rapide des propriétés d'un écoulement sans grand frais et avec des montages très simples. En effet, la déduction des propriétés spatiales détaillées demande le plus souvent un très grand nombre de mesures et permet difficilement d'étudier des écoulements instationnaires non-périodiques. Bien entendu, ces visualisations sont généralement purement qualitatives et ne permettent pas une mesure quantitative des champs de vitesse.

On va résumer dans ce chapitre les techniques usuelles de visualisation et examiner quelles modifications ont été tentées jusqu'ici pour en extraire des mesures plus quantitatives. On essayera d'en déduire l'approche la plus viable pour développer une véritable technique de vélocimétrie spatiale.

### 2. TECHNIQUES DE VISUALISATION

Remarquons de prime abord que les techniques de visualisation peuvent être divisées en deux familles: celles liées à l'introduction de corps étrangers, de "traceurs" qui "suivent" l'écoulement et celles sensibles aux variations de l'indice de réfraction du fluide de l'écoulement. On commencera d'abord par décrire ces dernières en insistant sur les variantes les plus récentes.

#### 2.1 Techniques liées aux fluctuations d'indice de réfraction

Une forte fluctuation de la masse volumique ou de la température d'un fluide peut provoquer une variation d'indice de réfraction suffisante pour dévier sensiblement des rayons lumineux le traversant. C'est le principe des méthodes d'ombroscopie.<sup>1</sup> La faible sensibilité de cette

méthode en réserve l'application aux très fortes fluctuations d'indice (effets thermiques dans les liquides, ondes de choc).

Une variante très importante de cette méthode simple consiste à bloquer les rayons non déviés par une "lame de couteau" placée dans le plan de Fourier (Fig. I.1). Cette technique, appelée "Foucaultage" (Schlieren) est utilisée universellement depuis des dizaines d'années.<sup>1,2</sup> La description intuitive basée sur la marche des rayons est évidemment insuffisante et seule une formulation recourant à la diffraction permet de rendre compte des phénomènes observés, surtout quand des masques plus élaborés qu'un demi-plan opaque sont utilisés (dérivation, contraste de phase).<sup>1,3</sup> L'avantage de ces techniques réside dans leur grande simplicité et dans le fait qu'elles ne nécessitent pas de cohérence de la lumière.

La nécessité de mesurer des variations d'indice de réfraction très faibles a amené à concevoir des systèmes sensibles à des variations de chemin optique de l'ordre de la longueur d'onde, comme les interféromètres.<sup>4</sup>

En faisant passer l'écoulement fluide dans un bras d'un interféromètre de Michelson ou de Mach-Zender, on obtient une série de franges dont l'intensité lumineuse est une fonction sinusoïdale de la différence de chemin optique entre les deux bras. En utilisant des interféromètres différentiels, il est possible d'obtenir des franges dont le profil est fonction de la dérivée transversale de l'indice de réfraction.<sup>5</sup> Tout comme les méthodes précédentes, ces techniques effectuent une intégration tout au long du trajet optique et le calcul de la répartition d'indice de réfraction ne peut se faire aisément que pour des phénomènes bidimensionnels ou axisymétriques.<sup>6</sup> D'autre part, la mise en oeuvre de ces méthodes nécessite une grande stabilité mécanique du montage.

Un interféromètre classique compare deux fronts d'onde en temps réel et ne permet pas de comparer des fronts d'onde séparés dans le temps (avec et sans écoulement, par exemple). D'autre part, on compare un front d'onde "objet" avec un front d'onde "référence" sans défauts. C'est oublier que l'interférogramme sans écoulement peut présenter un grand nombre de franges parasites dues aux défauts des optiques et, en particulier, des fenêtres de visualisation. Pour ces raisons, il était tentant d'introduire un moyen de mémoriser un champ d'amplitude lumineuse: l'holographie.<sup>1,7-13</sup> On trouvera à la figure I.2 le schéma de principe d'un montage holographique. Citons simplement les deux procédures les plus employées:

i) enregistrement d'un hologramme sans écoulement et, sans toucher à la plaque, enregistrement d'un deuxième hologramme en présence de l'écoulement. A la reconstitution, on observera des franges d'interférence

décrivant ce qui différencie les deux fronts d'onde enregistrés.  
 ii) enregistrement d'un hologramme en double exposition (temps court entre les deux expositions) lors du déroulement d'un phénomène instationnaire. L'intérêt de ces deux procédés réside dans l'absence de frange aux défauts optiques du système (poussières, etc...).

Le système le plus séduisant actuellement est une simple variante à deux références du montage classique (Fig. I.3).<sup>11</sup> Imaginons que la référence R1 serve à enregistrer le premier hologramme tandis que le deuxième est enregistré avec la référence R2. Lors du rééclairage par les deux références simultanées, une modification (orientation, phase, ...) de R1 et/ou R2 permet de produire des franges de "fond" modulables à volonté. En particulier, une différence de phase valant  $\pi$  permet de soustraire les deux fronts d'onde et de supprimer ainsi les parties communes aux deux images holographiques (par exemple, les anneaux de diffraction dus aux poussières). Notons que cette technique se rapproche très fort du contrôle de franges en interférométrie holographique en temps réel.<sup>6</sup>

Ces excellentes performances se payent évidemment: les montages holographiques sont chers (lasers pulsés à grande longueur de cohérence) et difficiles à ajuster, même si les contraintes de stabilité du montage sont totalement relaxées pour les mesures à haute vitesse avec des lasers doublement pulsés. Pour terminer, signalons encore qu'un simple hologramme en exposition unique d'un écoulement peut être extrêmement utile. On peut en effet lui appliquer les techniques d'ombroscopie, de schlieren et de contraste de phase a posteriori.

## 2.2 Techniques basées sur l'introduction de traceurs

Les techniques de visualisation par colorants et fumées sont utilisées depuis longtemps et leur principe est bien connu. Citons simplement quelques perfectionnements récents:

- génération de rangées de traceurs par<sup>14-16</sup>
  - . électrolyse de l'eau autour d'un fil où passe un courant électrique pulsé (production de bulles d'hydrogène)
  - . ionisation de l'air par une décharge électrique entre deux électrodes
  - . évaporation de gouttes d'huile déposées sur un fil chauffé électriquement

Les deux premières techniques permettent d'obtenir une vue Lagrangienne de l'écoulement si on produit périodiquement des lignes de bulles ou

de plasma. La troisième permet de visualiser les lignes d'émission. Ces trois techniques sont clairement perturbatrices.

- utilisation de particules fluorescentes activées par un rayonnement<sup>17</sup>
- Combinaison des techniques de traceurs et d'ombroscopie. En éclairant un écoulement compressible avec une tranche lumineuse, celle-ci va se concentrer dans des régions rendues visibles par la diffusion lumineuse de traceurs.<sup>18-19</sup>

Le traitement des images fournies par les expériences de visualisation a connu une progression rapide vers un traitement plus systématique. De plus en plus, les images sont enregistrées sur bande vidéo, ce qui élimine le développement photographique et ouvre la voie à des traitements électronique ou numérique ultérieurs. Les techniques de reconnaissance de forme ont prouvé leur efficacité pour la caractérisation de rouleaux émis derrière un obstacle ("allée" de Von Karman)<sup>20</sup> ou dans une couche de cisaillement<sup>21</sup>. Dans ce dernier cas, les statistiques (Lagrangienne et Eulérienne) de position, vitesse et taille des rouleaux ont pu être déterminées.

On peut essayer d'aller plus loin en remarquant que l'intensité lumineuse diffusée par de la fumée ou un aérosol est grosso modo liée à la concentration de ce traceur. En éclairant une "tranche" d'un fluideensemencé et en enregistrant la répartition spatiale de la lumière diffusée, on peut déduire la répartition de concentration. Une application typique de ce procédé est l'analyse de la diffusion d'un polluant.<sup>22</sup> Quelques essais récents ont pu montrer que la technique est utilisable<sup>23-26</sup> pour l'étude de phénomènes de mélange et de transfert de masse.

L'inconvénient de cette dernière technique est sa linéarité douteuse. Le nombre de diffuseurs dans un élément de résolution doit être suffisamment grand, mais la distance entre deux particules ne peut être trop petite, les particules devant se comporter de manière indépendante du point de vue de la diffusion lumineuse et les effets de multiple diffusion devant être limités au maximum.

### 3. VELOCIMETRIE SPATIALE

#### 3.1 Introduction

Lorsque les corrélations spatiales de la vitesse entre deux points doivent être mesurées, il est encore possible d'utiliser deux sondes à fil chaud ou deux anémomètres Doppler. Pour étudier spatialement un champ de vitesse en un grand nombre de points, ce genre de procédé est évidemment impra-

ticable et il faut se tourner vers des perfectionnements des visualisations décrites précédemment. Il faut bien remarquer que ces visualisations sont des versions un peu hâtives d'expériences bien plus puissantes. Par exemple, pour faire une visualisation par fumées, on ne se soucie pas trop de la concentration des traceurs, de la qualité de l'illumination ni de la résolution de la pellicule photographique utilisée. On perd ainsi toute l'information liée au mouvement des traceurs.

Une vraie expérience de vélocimétrie consiste à utiliser un film permettant de résoudre des particules de très petite dimension et en nombre assez faible. En éclairant une "tranche" bien délimitée de l'écoulement (Fig.I.4), on peut obtenir des segments de trajectoires si l'éclairement est long ou des séries de points en cas d'éclairement stroboscopique. La longueur des traces dans le premier cas, ou la distance entre deux images successives d'une même particule dans le second cas, est une mesure de la projection de la vitesse dans un plan perpendiculaire à la ligne de vue. Ces principes sont connus depuis longtemps et leur application a été facilitée, ces dernières années, par l'introduction des sources laser dont la cohérence spatiale permet d'obtenir des densités d'énergie très importantes. On trouvera une description d'une série d'expériences récentes illustrant ces principes dans les références 27-38.

Malheureusement, ces techniques se sont toujours heurtées à un obstacle majeur: l'interprétation des images enregistrées. On se rend immédiatement compte de l'immensité du travail fastidieux qui attend un opérateur chargé de l'examen visuel de ces images. On décrira par la suite les techniques à employer pour faciliter le dépouillement, en tenant compte de ce qu'il faut différencier les deux problèmes: l'analyse de segments de trajectoires et l'analyse de successions de points.

### 3.2. Analyse de trajectoires

La photographie de trajectoires souffre de deux défauts fondamentaux:

- i) si l'écoulement est tridimensionnel, il est difficile de déterminer si l'interruption d'une trajectoire est due à l'interruption de l'éclairement ou bien à l'évasion de la particule en dehors de la zone éclairée.
- ii) deux particules assez distantes peuvent voir leurs trajectoires se confondre si le temps d'exposition est trop long. En termes photographiques, le noircissement de la photographie est très important dans cette technique, la pellicule étant continuellement exposée pendant l'expérience

Le premier défaut réduit le champ d'application de la méthode aux écoulements bidimensionnels ou aux feuillets lumineux assez épais. Dans ce dernier cas, la perte de résolution en profondeur peut être compensée par une prise de vue stéréoscopique, ce qui ne facilite guère le dépouillement.

Le deuxième défaut limite la densité de particules traçantes. On n'obtient pas alors un véritable champ de vitesse mais la mesure simultanée d'un petit nombre de vitesses bidimensionnelles en des points aléatoirement disposés.<sup>37</sup> Ceci réduit fortement l'utilité des mesures obtenues. En effet, si des mesures instantanées de vitesse sont intéressantes en elles-mêmes, il peut être encore plus intéressant d'en déduire des quantités dépendant des dérivées spatiales de la vitesse. Un bel exemple est la composante du tourbillon perpendiculaire au plan éclairé. Une trop faible densité de points de mesure rend ce calcul fort difficile, le champ de vitesse devant être déduit par interpolation.<sup>36a,36b</sup>

L'avantage de la photographie de trajectoires réside dans la relative facilité d'analyse des clichés. Il est facile pour un œil (couplé à un cerveau humain) de "suivre" une trajectoire. De la même façon, un ordinateur peut suivre une trajectoire numérisée une fois qu'il l'a "accrochée".<sup>37</sup> Ce principe est appliqué dans les machines permettant d'analyser les clichés des chambres à bulles. Répétons encore que cette analyse n'est simple que si la densité de traces est faible. En cas de traces se confondant, une décision doit être prise (généralement par un opérateur extérieur) pour savoir quel est le prolongement de la trajectoire étudiée ou si le groupe de traces doit être éliminé.

### 3.3 Analyse de successions de points

L'utilisation d'une suite d'impulsions courtes permet de relaxer quelque peu les contraintes liées à la photographie de trajectoires. Le noircissement est en effet moindre puisque le temps d'exposition est beaucoup plus petit pour une durée totale d'expérience équivalente. D'autre part, cette technique est beaucoup moins sensible aux déplacements tridimensionnels. Dans le cas limite où le déplacement perpendiculaire au plan éclairé est tellement grand qu'une seule image de chaque particule peut être enregistrée, un système d'analyse produira une indétermination plutôt qu'une mesure fautive.

Ces avantages sont compensés par un accroissement de la difficulté d'

analyse. En effet, si la séparation moyenne entre deux particules indépendantes est du même ordre de grandeur que le déplacement entre deux poses successives (Fig.I.5), l'analyse devient difficile. Même visuellement, il devient difficile de discerner les couples de particules. Un algorithme simple de recherche de couples de particules ne peut donc fonctionner que si l'on est quasiment sûr que le correspondant d'un point dans un couple est son voisin le plus proche.<sup>35,36</sup> Vu la dimension finie des images des particules et la nécessité d'avoir un déplacement minimum pour des raisons de précision, il n'est malheureusement pas toujours possible de diminuer le déplacement (en diminuant l'intervalle de temps entre impulsions) jusqu'à ce que cette condition soit satisfaite.

Le seul cas où le problème peut être résolu en partie est celui où on a une idée a priori de certaines caractéristiques du champ de vitesse à mesurer.<sup>36</sup> Si par exemple, on sait que le champ peut être développé en série limitée de fonctions dont on cherche les "poids", il est possible, à partir d'une première approximation, de savoir dans quelle région on doit trouver les images successives d'une particule de départ. Les particules repérées dans ces régions permettent d'obtenir une nouvelle approximation du champ de vitesse que l'on peut améliorer par approximations successives.

Des algorithmes de traitement plus raffinés doivent être imaginés pour traiter des situations comme celle schématisée à la figure I.5 où la densité de particules est suffisamment importante pour pouvoir obtenir une bonne approximation du champ continu de vitesse. On a le choix entre deux démarches. D'une part, "suivre" les particules individuelles dans leur mouvement et trouver un critère de qualité permettant de déterminer dans quelle direction se déplacent les particules et quelle est la valeur de ce déplacement. D'autre part, on peut essayer de trouver un paramètre global décrivant le déplacement d'ensemble de la région considérée en oubliant que la photographie est constituée de points discrets.

Une technique illustrant cette dernière possibilité consiste à calculer l'autocorrélation à deux dimensions de la transparence de la région considérée de la photographie (Fig.I.5). Si la vitesse  $y$  est uniforme, on obtient ainsi des pics de corrélation permettant de déterminer le déplacement. Il est à noter que le même résultat peut être obtenu avec un temps de calcul réduit, en calculant la transformée de Fourier du spectre de puissance. Celui-ci se présente sous la forme d'une fonction cosinusoïdale unidimensionnelle (voir la fig. I.5). Il est étonnant de constater que ce concept simple n'a jamais été appliqué ni même suggéré dans la littérature. Ceci est probablement dû à la nécessité de numériser l'image avec une résolution

suffisante. Pour donner un ordre de grandeur, remarquons que, usuellement, les diamètres des images des particules sont compris entre 10 et 30 microns; le pas adéquat de numérisation est alors d' environ 5 microns.

Le principe général de cette technique d' analyse va néanmoins se révéler extrêmement fructueux. En effet, une transformée de Fourier à deux dimensions est très simple à produire grâce à l' optique cohérente. C' est le principe même des techniques de speckle qui seront développées plus loin.

Enfin, pour être complet, terminons en remarquant -ce qui est très important- que ces techniques ne permettent pas de déterminer le sens du déplacement. Ce problème peut être résolu en éclairant le fluide avec une suite d' impulsions inégalement espacées. Ce schéma d' illumination rend évidemment l' analyse beaucoup plus délicate. Nous verrons plus loin que la présence d' une vitesse d' entraînement n' handicape pas la méthode sous sa forme la plus simple: la double exposition.

#### 3.4. Techniques holographiques

Les techniques photographiques sont fondamentalement bidimensionnelles et ne permettent pas de déterminer la composante de vitesse perpendiculaire au plan éclairé, qui est parallèle à la ligne de vue. D' autre part, la profondeur de champ est limitée et ne peut être augmentée qu' au détriment de la résolution. En plus, la dynamique des récepteurs photographiques est réduite si bien que, par effet de saturation, deux particules de brillance différente donnent des images de dimensions différentes (comme les photographies d' étoiles de magnitude différente) et la résolution du système optique est mal utilisée. C' est pourquoi de très nombreux essais ont été réalisés pour substituer l' holographie à la photographie.<sup>39-52</sup> En particulier, les références (39,40) donnent des bibliographies assez complètes de la question.

Deux montages sont envisageables: "en-ligne" (montage de Gabor) où le faisceau d' éclairage sert aussi de référence (Fig.I.6.a) et "hors-axe" où une référence extérieure est utilisée (Fig.I.6.b). Décrivons rapidement les avantages et désavantages de ces techniques:

- Comme l' énergie diffusée par les particules est répartie sur toute la plaque holographique, les problèmes de saturation sont supprimés, la dynamique d' enregistrement devient très grande et, en conséquence, la résolution de l' hologramme est utilisée au maximum.
- La profondeur de champ est infinie (en fait, elle est limitée par la longueur de cohérence du laser). Néanmoins, il faut se souvenir que la

résolution est liée, comme en photographie, à l'ouverture. Plus éloigné sera l'objet, plus faible sera la résolution. En plus, la grande profondeur de champ n'est pas toujours un avantage. Les particules situées en deçà et au delà du plan observé se manifestent par des anneaux de diffraction qui, en interférant, produisent un bruit de fond.

- Les hologrammes sont généralement enregistrés avec un laser à rubis ( $\lambda=6943 \text{ \AA}$ ) et restitués avec un laser He-Ne ( $\lambda=6328 \text{ \AA}$ ). Ce changement de longueur d'onde est une importante source d'aberrations. On peut y remédier en utilisant une nouvelle génération de lasers (Nd:YAG doublés en fréquence et pouvant fonctionner à 30 Hz pour la restitution<sup>53,54</sup>) ou le montage de Gabor qui minimise les aberrations à la reconstruction.<sup>41,42</sup>
- Le principe même de l'hologramme de Gabor impose que le faisceau subisse une faible perturbation lors de son passage dans le champ de particules. Ceci restreint le champ d'application à des densités de particules assez faibles.<sup>41,42</sup> L'holographie "hors-axe" n'est pas sensible à cet effet, mais l'énergie diffusée aux grands angles est beaucoup plus faible.
- La technique illustrée à la figure I.3, permettant la soustraction des défauts communs, peut être appliquée avec succès dans le cas de particules en mouvement.<sup>11,55,56</sup>

Pour les applications de vélocimétrie, on se trouve devant le problème majeur déjà rencontré en photographie : l'exploitation des résultats. Ici le problème est encore aggravé par la troisième dimension. Cela conduit à des temps de dépouillements "manuels" extrêmement élevés.<sup>43</sup> Les études lancées sur le dépouillement automatique des hologrammes de chambre à bulles permettront sans doute d'avancer dans ce domaine. Actuellement, les algorithmes de reconnaissance numérique de forme<sup>57</sup> commencent à être appliqués pour la localisation de particules et pour la mise au point sur celles-ci.<sup>58</sup>

### 3.5. Techniques spéciales

Les lignes qui vont suivre constituent une description simple de deux techniques dérivées des précédentes et dont l'avenir semble prometteur.

- 1) Les techniques d'interférométrie holographique utilisées en mécanique du solide<sup>6</sup> peuvent être transposées en mécanique des fluides. Imaginons que l'on éclaire un fluide fortementensemencé au moyen d'un feuillet lumineux cohérent dont on enregistre un hologramme en double exposition. Si le "diffuseur" constitué par les particules éclairées ne se décorrèle

pas avec le déplacement, on peut observer des franges d'interférence liées à ce déplacement.<sup>59-62</sup> La grande sensibilité de ce système est un avantage, mais l'interprétation des franges est un problème difficile comme en mécanique des solides.

- 2) Pourquoi utiliser un support photographique classique, qu'il faut révéler, fixer et sécher? On a déjà mentionné précédemment la possibilité d'enregistrer des images au moyen d'un magnétoscope. Clairement, la résolution n'est pas suffisante pour une application de vélocimétrie mais on pourrait imaginer de numériser directement une image latente formée sur un tube vidicon ou sur une matrice CCD.<sup>64,65</sup> Le nombre de pixels de ce type de récepteurs est maintenant assez important : environ  $1000 \times 1000$  points.<sup>63</sup> Avec un pas de numérisation de  $5 \mu\text{m}$ , le champ étudiable serait de  $5\text{mm} \times 5\text{mm}$ , ce qui n'est pas négligeable. L'investissement pour un système d'images ayant de telles performances est évidemment considérable. Il est donc hautement probable que l'exploration de grands champs à faible coût restera encore longtemps l'apanage des émulsions photographiques, tout comme en astronomie.<sup>63</sup>

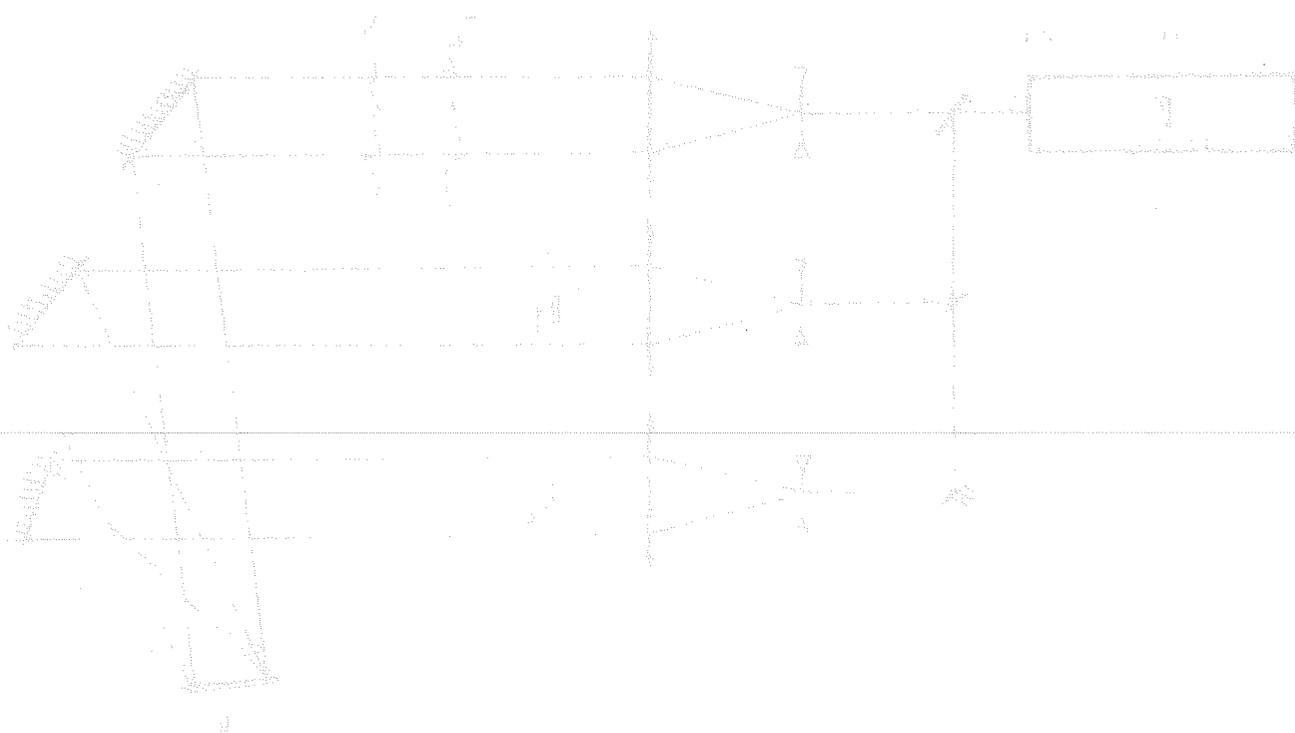
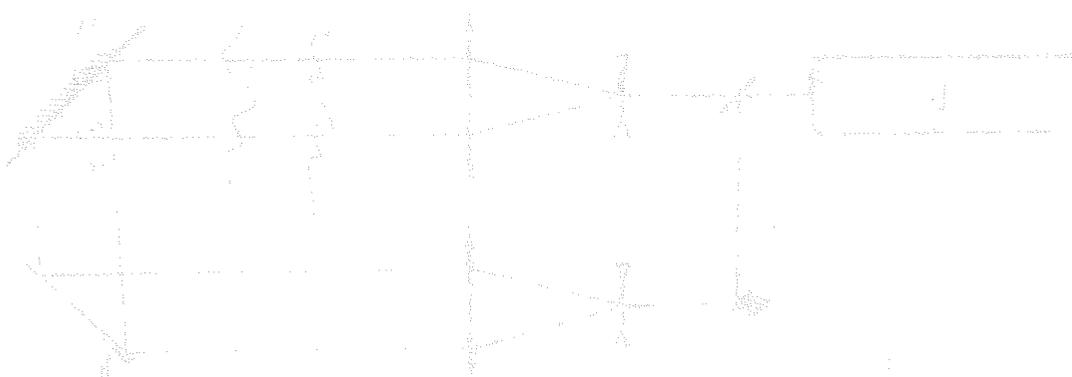
#### 4. CONCLUSIONS

Comme on l'a vu précédemment, les techniques de visualisation utilisant des particules traçantes peuvent être aisément améliorées pour conserver l'information sur la vitesse qui y est contenue. Ce sont les sérieux problèmes d'analyse qui ont fait quelque peu délaïsser ces techniques.

Le montage optique d'enregistrement des photographies d'une "tranche" de fluide éclairé se signale par sa grande simplicité (Fig.I.4) mais souffre de quelques défauts au niveau du récepteur photographique: mauvaise dynamique et information purement bidimensionnelle. Une solution peut être apportée par l'introduction de l'enregistrement holographique mais au prix d'un montage plus élaboré et plus délicat, de la nécessité d'utiliser un laser de bonne cohérence temporelle et de la complication encore accrue du dépouillement.

Malgré les défauts de l'enregistrement photographique, il a semblé que sa grande simplicité était un avantage décisif pour une technique de vélocimétrie viable. C'est pourquoi il a été décidé d'essayer de perfectionner un peu les vieilles techniques photographiques, en systématisant le dépouillement des clichés dans la ligne des considérations du § I.3.3. On verra dans les chapitres suivants que l'application de ces techniques

dites "de speckle" permet d'extraire des informations utiles jusqu'ici impossibles à mesurer, même si cette information, limitée à deux dimensions, pourrait être, en principe, complétée par l'utilisation de procédés tridimensionnels comme l'holographie.



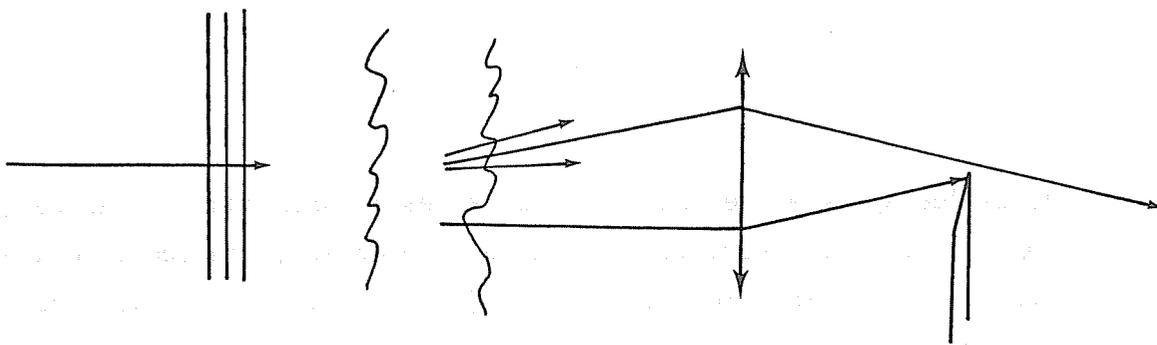


Fig.I.1. Méthode de visualisation de Foucault

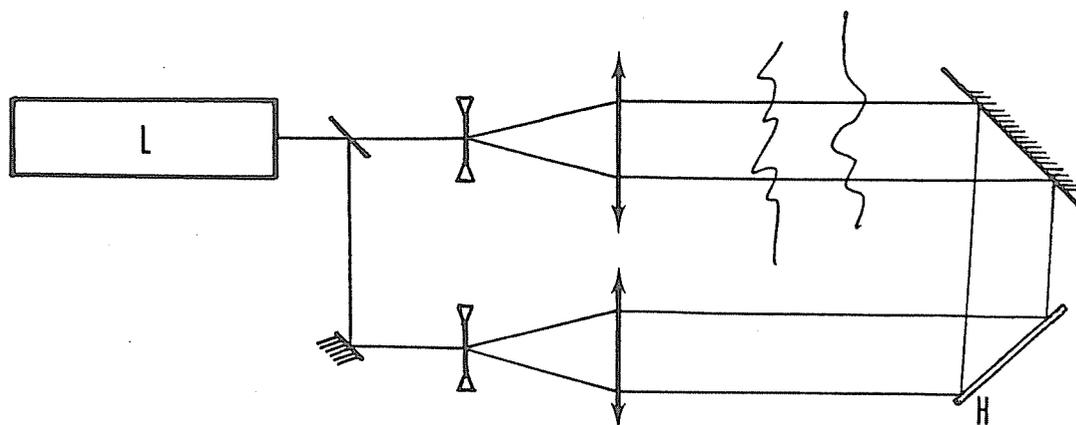
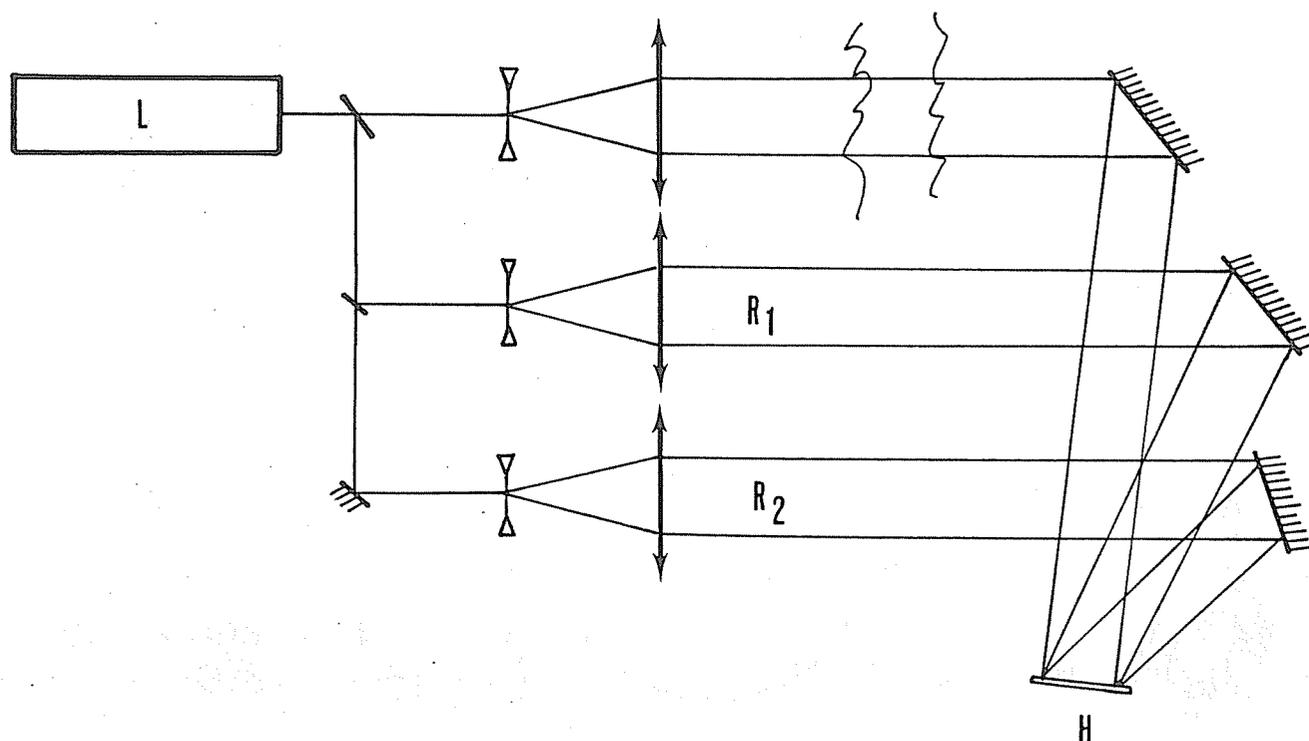


Fig.I.2. Montage holographique "hors-axe" par transmission

Fig.I.3. Montage holographique à deux références ( $R_1$  et  $R_2$ )

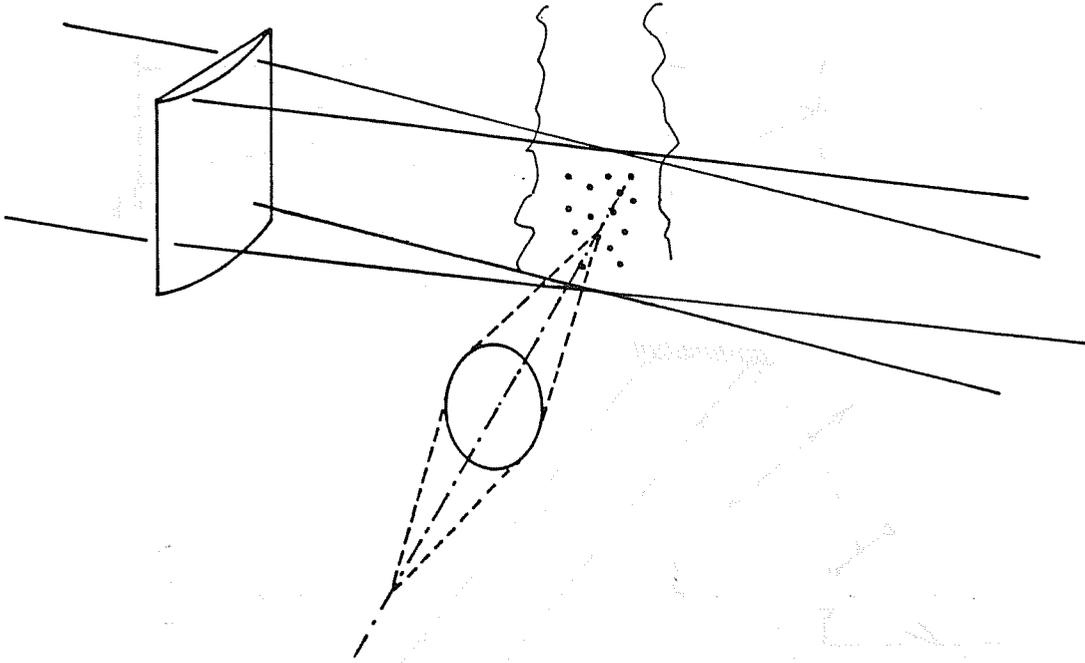


Fig.I.4. Principe de la prise de vue pour la mesure de vitesse par traceurs.

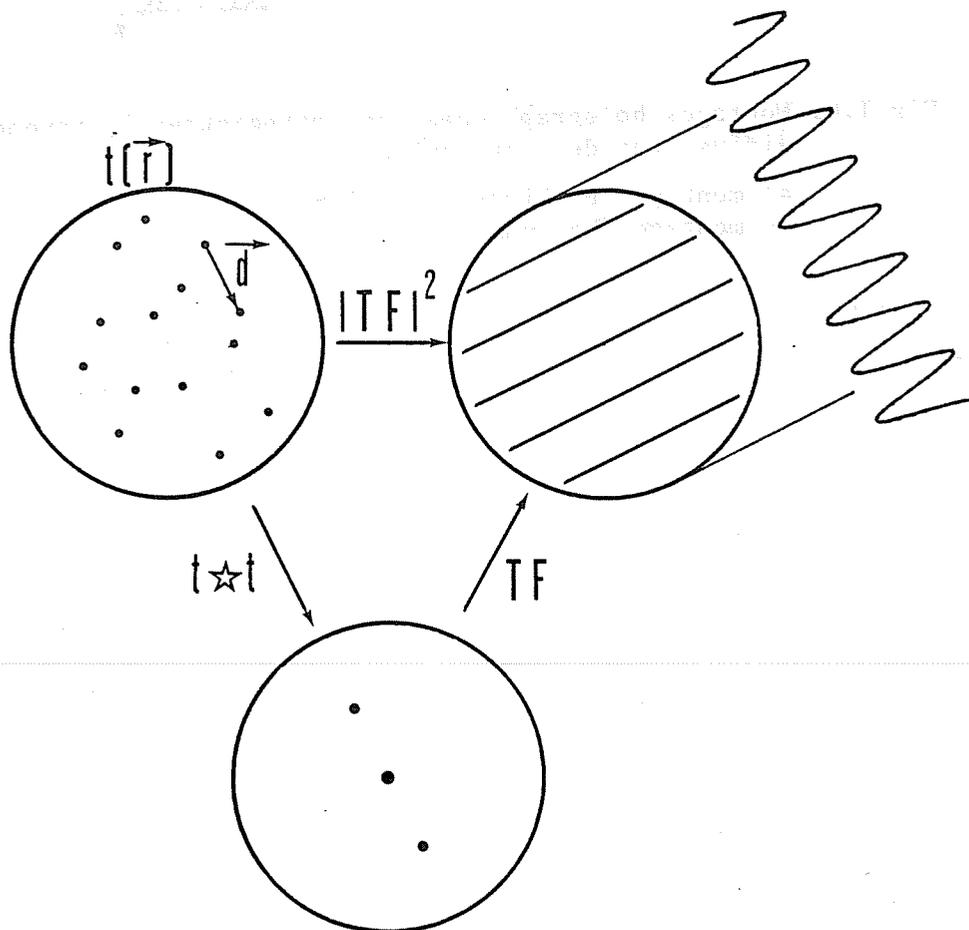


Fig.I.5. Principe de l'analyse des photographies prises en double exposition au moyen du montage de la fig.I.4. TF symbolise la transformée de Fourier à deux dimensions et  $\star$  symbolise la corrélation.

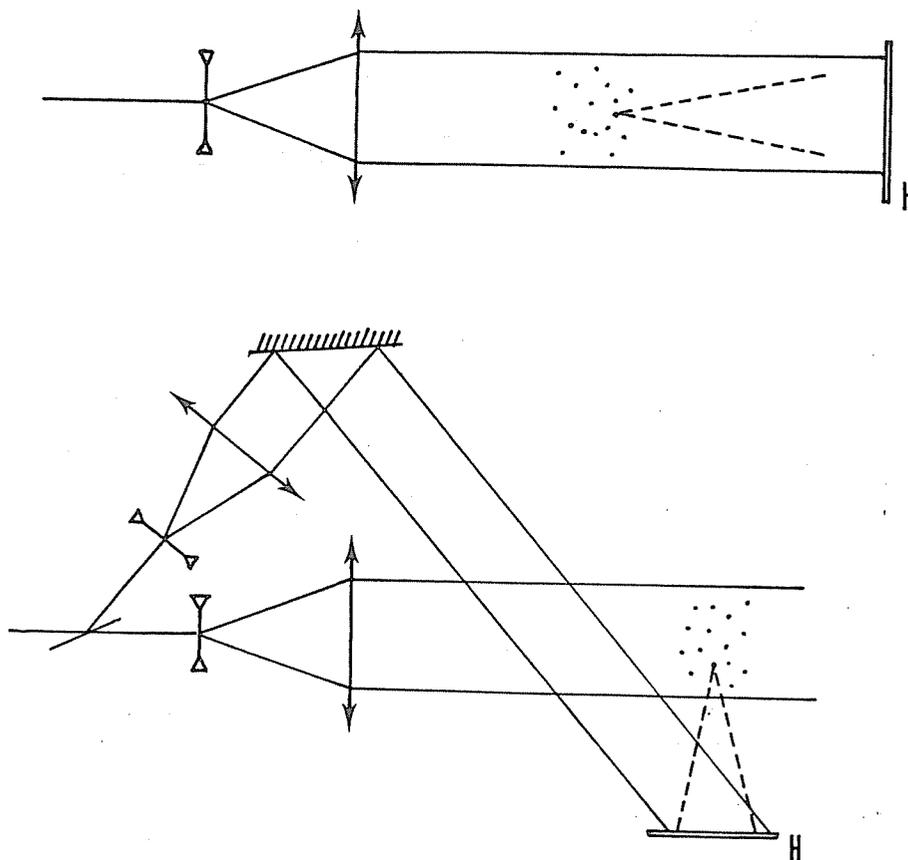


Fig.I.6. Montages holographiques pour enregistrer le rayonnement diffusé par des particules.

- a: montage "en-ligne" ( de Gabor )  
 b: montage "hors-axe"

## CHAPITRE II : VELOCIMETRIE ET SPECKLE : INTRODUCTION GENERALE

1. INTRODUCTION : Optique cohérente et transformée de Fourier

Comme il a été suggéré au chapitre I (I.3.3. et Fig. I.5), l'utilisation de techniques de corrélation ou de transformée de Fourier devrait apporter un élément de solution au problème de l'analyse des clichés en multiple exposition de particules en mouvement. Un tel procédé est d'autant plus intéressant que l'optique cohérente fournit le moyen d'effectuer "instantanément" des transformées de Fourier spatiales. C'est ce que nous allons introduire ici.

Il est "bien connu" que la diffraction de Fraunhofer produit une transformée de Fourier à deux dimensions et que l'"infini" peut être "rapproché" en utilisant une lentille convergente mince <sup>4,66</sup> (Fig. II.1.). Si une transparence  $t(\vec{r}_0)$  est disposée dans le plan focal avant une lentille convergente et si elle est éclairée au moyen d'une onde plane cohérente, l'amplitude lumineuse dans le plan focal arrière s'écrira, à l'approximation paraxiale ("petits angles") et en faisant abstraction des effets de pupille,

$$A(\vec{r}_f) = K \iint_{-\infty}^{+\infty} t(\vec{r}_0) \exp\left(-\frac{2\pi}{\lambda f} \vec{r}_0 \cdot \vec{r}_f\right) d\vec{r}_0 \quad (1)$$

où  $K$  est un facteur de proportionnalité,  $\lambda$  est la longueur d'onde et  $f$  la focale de la lentille. Notons que si l'on place l'objet ailleurs que dans le plan focal avant, on obtient toujours une transformée de Fourier, mais multipliée par des termes de phase quadratiques en  $|\vec{r}_f|$ .

Si nous symbolisons par  $TF_{\vec{r}_f}$  l'opération effectuée par la lentille, l'intensité observée dans le plan focal vaut :

$$I(\vec{r}_f) = |TF_{\vec{r}_f} t(\vec{r}_0)|^2 \quad (2)$$

Nous appellerons le carré du module de la transformée de Fourier "spectre de puissance" ou encore "densité spectrale de puissance" pour reprendre l'appellation anglo-saxonne <sup>66</sup>.

Notons trois propriétés importantes :

- si  $t(\vec{r}_0)$  est réel ( transmittance photographique idéalisée ), on a

$$I(\vec{r}_f) = I(-\vec{r}_f) \quad (3)$$

(symétrie par rapport à l'origine)

- la transformée inverse s'écrit :

$$t(\vec{r}_0) = \text{TF}_{\vec{r}_0}^{-1} A(\vec{r}_f) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\vec{r}_f) \exp\left(\frac{2\pi}{\lambda f} \vec{r}_0 \cdot \vec{r}_f\right) d\vec{r}_f \quad (4)$$

Cette relation signifie clairement qu'une lentille mince effectuée indifféremment une transformée directe ou une transformée inverse, une inversion des coordonnées différenciant seulement ces deux notions.

- l'application du théorème classique sur l'autocorrélation donne :

$$\begin{aligned} g(\vec{u}) &= t(\vec{u}) \star t(\vec{u}) = \int_{-\infty}^{+\infty} t(\vec{r}_0) \cdot t(\vec{r}_0 - \vec{u}) d\vec{r}_0 \\ &= \text{TF}_{\vec{u}}^{-1} |A(\vec{r}_f)|^2 = \text{TF}_{\vec{u}}^{-1} \left| \text{TF}_{\vec{r}_f} t(\vec{r}_0) \right|^2 \end{aligned} \quad (5)$$

On a une propriété équivalente pour les convolutions : (désignées par  $*$ ).

### 1.1 Analyse spectrale - Application à la recherche de périodicités

Imaginons que la transmittance  $t(\vec{r}_0)$  soit constituée d'une microstructure. Par exemple, supposons que  $t(\vec{r}_0)$  est une collection d'images ponctuelles comme à la Fig. I.4. Néanmoins, n'importe quelle microstructure peut convenir. Imaginons encore que cette collection de points décrite par la fonction  $C(\vec{r}_0)$  ait été photographiée une deuxième fois après un déplacement d'ensemble. On a alors :

$$t(\vec{r}_0) = C(\vec{r}_0) + C(\vec{r}_0 - \vec{d}) \quad (6)$$

On en déduit (équation (1)) :

$$A(\vec{r}_f) = \left[ 1 + \exp \frac{2\pi}{\lambda f} \vec{r}_f \cdot \vec{d} \right] \cdot \text{TF}_{\vec{r}_f} C(\vec{r}_0) \quad (7a)$$

et

$$I(\vec{r}_f) = 2 \left| \text{TF}_{\vec{r}_f} C(\vec{r}_0) \right|^2 \left[ 1 + \cos \frac{2\pi}{\lambda f} \vec{r}_f \cdot \vec{d} \right] \quad (7b)$$

En effectuant une transformée de Fourier de (7b), on obtient :

$$g(\vec{u}) = \text{TF}_{\vec{u}}^{-1} [I(\vec{r}_f)] = 2 \{ \text{TF}_{\vec{u}}^{-1} [ | \text{TF } C |^2 ] \} * \text{TF}_{\vec{u}}^{-1} [ 1 + \cos \frac{2\pi}{\lambda f} \vec{r}_f \cdot \vec{d} ] \quad (8)$$

$$= 2 [ C(\vec{u}) \star C(\vec{u}) ] * [ \delta(\vec{u}) + \frac{1}{2} \delta(\vec{u}-\vec{d}) + \frac{1}{2} \delta(\vec{u}+\vec{d}) ] \quad (9)$$

$$= 2 [ C(\vec{u}) \star C(\vec{u}) ] + C(\vec{u}) \star C(\vec{u}+\vec{d}) + C(\vec{u}) \star C(\vec{u}-\vec{d})$$

On vérifie aisément que (9) représente bien l'autocorrélation de  $t(\vec{r}_0)$ . Comme on le voit sur la Fig.II.2., si  $| \text{TFC} |^2$  s'étend plus loin que  $\frac{\lambda f}{d}$ , on observera des franges cosinusoïdales, que l'on peut dénommer "franges de Young généralisées" (Fig.I.5. et II.2.). De la même manière, si l'autocorrélation de  $C(\vec{r}_0)$  a une extension moindre que  $d$ , on observera des pics bien définis dans  $g(\vec{u})$ . Bien entendu, ces deux conditions sont équivalentes et signifient que le déplacement doit être plus grand que la dimension moyenne de la microstructure.

La possibilité de mesurer le déplacement d'ensemble d'une transparence compliquée et inconnue apparaît donc clairement. Pour ce faire, il suffit que l'objet comporte une microstructure plus petite que le déplacement à analyser.

Deux points très importants doivent être soulignés :

- Cette technique est largement utilisée en mécanique du solide pour étudier le champ de déplacement de surfaces d'objets présentant une certaine rugosité. Dans ce cas, la microstructure de l'objet est due à un phénomène optique lié à la rugosité de la surface. Ce phénomène appelé "granularité laser" en "bon" français sera néanmoins dénommé "speckle" pour reprendre l'appellation universelle.

- D'autre part, la forme de  $| \text{TF } C |^2$  et de  $C \star C$  dans la figure II.2. est pour le moins idéalisée. En effet, la microstructure de  $C(\vec{r}_0)$  est aléatoire et est une manifestation des phénomènes de speckle. Ce qui est représenté sur la Fig.II.2., est en fait l'enveloppe de  $| \text{TF } C |^2$ .

Pour ces raisons, la notion de speckle doit absolument être précisée.

C'est ce qui va être fait à la section II.2.

## 2. LE SPECKLE

### 2.1. Définition et propriétés

Une surface rugueuse illuminée par un faisceau laser présente un aspect granuleux assez étrange. Cette granularité visible à l'oeil nu est en plus "mobile" : il suffit de changer légèrement la position de l'oeil pour voir cette granularité se modifier totalement. La théorie du speckle est maintenant classique.<sup>66,67,68</sup> C'est pourquoi nous nous bornerons à ne rappeler que ses propriétés essentielles.

Admettons que la surface rugueuse soit constituée par un grand nombre de microstructures qui peuvent être modélisées par un très grand nombre de sources indépendantes introduisant des variations de phase beaucoup plus grandes que la longueur d'onde, si bien que toutes les phases comprises entre  $[-\pi, +\pi]$  sont également probables. Toutes les ondelettes diffusées par les sources vont interférer et se recombiner dans l'oeil de l'observateur. Admettons en plus que les ondelettes soient toutes polarisées dans la même direction.

Les conditions pour appliquer le théorème central limite sont alors réunies et il vient immédiatement que les densités de probabilité des parties réelles (Re) et imaginaires (Im) de l'amplitude sont normales

$$p(\text{Re}, \text{Im}) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp -(\text{Re}^2 + \text{Im}^2) / 2\sigma^2 \quad (10)$$

Une autre manière de décrire le phénomène consiste à rechercher la densité de probabilité de l'intensité  $I$  et de la phase  $\theta$  par changement de variable à partir de (10)

$$\begin{aligned} \text{puisque } I &= \text{Re}^2 + \text{Im}^2 \\ p(I, \theta) &= \frac{1}{4\pi\sigma^2} \exp -(I / 2\sigma^2) \end{aligned} \quad (11)$$

La densité de probabilité de l'intensité pour toute valeur de  $\theta$  vaut

$$\int_{-\pi}^{+\pi} p(I, \theta) d\theta = \frac{1}{2\sigma^2} \exp - I/2\sigma^2 = \frac{1}{\langle I \rangle} \exp - I/\langle I \rangle \quad (12)$$

De la même manière, la densité de probabilité de la phase est constante sur l'intervalle  $[-\pi, +\pi]$ .

La distribution exponentielle négative de l'équation (12) nous apprend que l'intensité la plus probable est l'intensité nulle. En plus, on peut facilement calculer que la variance sur l'intensité ( $\sigma_I$ ) est égale à l'intensité moyenne ( $\langle I \rangle$ ). On résume généralement ceci en disant que le contraste du speckle défini par  $C = \sigma_I / \langle I \rangle$  est unitaire.

Ces simples déductions nous expliquent pourquoi de très larges fluctuations d'intensité peuvent être produites et pourquoi des grains lumineux aléatoirement disposés font leur apparition.

La taille de ces grains peut être estimée par l'analyse des corrélations spatiales de l'intensité lumineuse  $\langle I(\vec{r}_1) \cdot I(\vec{r}_2) \rangle$  où  $\langle \rangle$  représente une moyenne d'ensemble sur un grand nombre de diffuseurs de même statistique.

Pour des champs complexes gaussiens, on a

$$\begin{aligned} \langle I(\vec{r}_1) \cdot I(\vec{r}_2) \rangle &= \langle |A(\vec{r}_1)|^2 |A(\vec{r}_2)|^2 \rangle \\ &= \langle |A(\vec{r}_1)|^2 \rangle \langle |A(\vec{r}_2)|^2 \rangle + |\langle A(\vec{r}_1) A(\vec{r}_2) \rangle|^2 \\ &= \langle I(\vec{r}_1) \rangle \langle I(\vec{r}_2) \rangle + |\langle A(\vec{r}_1) A(\vec{r}_2) \rangle|^2 \end{aligned} \quad (13)$$

On peut rechercher  $\langle A(\vec{r}_1) \cdot A(\vec{r}_2) \rangle$  en calculant la propagation du champ lumineux depuis le diffuseur jusqu'au plan d'observation. En supposant en outre que la fonction d'autocorrélation de la surface diffusante est assimilable à une distribution  $\delta$ , on obtient<sup>66-69</sup> pour un speckle stationnaire

$$\langle I(\vec{r}_1) \cdot I(\vec{r}_2) \rangle = \langle I \rangle^2 \left[ 1 + \frac{\iint |P(\vec{\xi})|^2 \exp(j(k/z) \vec{\xi} \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)) d\vec{\xi}}{\iint |P(\vec{\xi})|^2 d\vec{\xi}} \right]^2 \quad (14)$$

où  $P(\vec{\xi})$  décrit la région éclairée de l'objet (Fig.II.3.).

Le coefficient de corrélation vaut donc

$$\rho(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \frac{\langle I(\vec{r}_1) \cdot I(\vec{r}_2) \rangle - \langle I \rangle^2}{\langle I \rangle^2} = \frac{TF_{(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)} |P|^2}{TF_{(\vec{r}=0)} |P|^2} \quad (15)$$

Le diamètre moyen du grain est donc la dimension de la tache de diffraction de la région éclairée. Pour une pupille circulaire de diamètre  $D$

$$\rho(\vec{r}) = \left| 2 \frac{J_1(\pi D r / \lambda z)}{(\pi D r / \lambda z)} \right|^2 \quad (16)$$

dont le premier zéro est situé à  $r = 1.22 \frac{\lambda z}{D}$ .

Ce résultat peut se comprendre par des arguments physiques. Considérons la figure II.3. Le champ dans le plan d'observation est le résultat des interférences entre les ondes émises par chaque point diffusant de la pupille éclairée. Les interférences entre les ondes émises par deux points situés en deux points diamétralement opposés sur la frontière de la région éclairée vont produire le réseau le plus fin possible dans le plan d'observation. On calcule aisément que ce réseau a un pas  $\Delta = \frac{\lambda z}{D}$ .

Le speckle décrit précédemment est un speckle dit "objectif", indépendant du système de vision. Si entre le plan d'observation et l'objet on introduit un système imageant (le cristallin de l'oeil par exemple), le speckle est dit subjectif. Le raisonnement utilisé pour calculer sa dimension reste néanmoins tout-à-fait valable si on considère que la pupille de sortie de la lentille se comporte comme un objet rugueux et si le nombre de grains de speckle qui la couvrent est grand. A ce moment, la formule (14) reste valable si  $P(\vec{\xi})$  décrit la pupille de sortie et  $z$  est la distance entre la pupille et le plan image. Il est à noter que la corrélation de l'intensité est alors indépendante des aberrations de la lentille, puisque celles-ci sont représentées par le facteur de phase de  $P(\vec{\xi})$ . Remarquons encore que l'hypothèse du grand nombre de grains de speckle objectif recouvrant la lentille n'est pas toujours satisfaite (objets diffusants de petite dimension).

La taille caractéristique du grain de speckle étant de l'ordre de grandeur de la tache de résolution de l'objectif, on déduit que cette dimension caractéristique peut être modulée à volonté en diaphragmant l'objectif. Pour donner un ordre de grandeur, la taille du grain de speckle peut varier entre quelques microns et quelques centaines de microns.

Quand les conditions d'application du théorème central limite ne sont pas remplies (faible nombre de diffuseurs et/ou déphasage petit devant  $2\pi$ ), la statistique de l'intensité du speckle peut fortement s'écarter de l'exponentielle négative<sup>67-71</sup>. On en aura un exemple au chapitre IV.

Notons simplement que la corrélation spatiale peut s'étendre alors sur de plus grands domaines et que le contraste  $\sigma_I / \langle I \rangle$  peut s'écarter de la valeur unité aussi bien par le haut que par le bas.

## 2.2. Speckle : applications

Un objet rugueux illuminé par un faisceau laser aura son image à travers un système optique "contaminée" par un fin speckle aléatoire. Cette granularité, si elle est très gênante du point de vue visuel, peut être mise à profit pour "marquer une surface". Il s'agit bien là d'une sorte d'empreinte digitale comme souligné dans<sup>72</sup>.

Cette modulation aléatoire d'une surface peut être diversement utilisée, nous n'en décrivons que les applications les plus directement reliées à notre problème<sup>80-83</sup>.

### 2.2.1. - Photographie des speckles<sup>72-78</sup>

Il s'agit de l'application la plus simple : un objet est éclairé par un faisceau laser plan ou quasi-plan (Fig.II.4.). Entre deux poses photographiques, la surface subit une déformation. On enregistre ainsi deux speckles identiques (s'il n'y a pas décorrélation de la surface) mais déplacés par la déformation. Le rééclairage local de la photographie produit des franges perpendiculaires au déplacement et de pas  $p = \frac{\lambda z}{d}$  où  $d$  est le déplacement et  $z$  la distance d'observation (Fig.II.5.).

Encore une fois, il faut remarquer que le déplacement doit être plus grand que la dimension du grain de speckle et que les franges sont contenues dans un halo de diffraction qui est lui-même un speckle dont le grain est :

d' autant plus gros que la région éclairée est petite.

La technique d'analyse point-par-point n'est pas la seule existante. Une technique immédiatement dérivée est schématisée à la figure II.6. Les lignes qui vont suivre se veulent uniquement une explication qualitative en guise d'introduction (voir IV.2.). Si on éclaire toute la photographie avec une onde plane cohérente, l'amplitude lumineuse observée dans le plan F sera la somme cohérente des franges de Young produites par toutes les régions de l'objet. Ces franges se différencieront par des interfranges et des orientations différentes. Si on place un masque percé par un petit trou circulaire situé hors de l'axe optique, l'amplitude lumineuse transmise sera due aux franges admettant un extremum à cet endroit ( Fig.II.7 ). Si on reconstruit une image du cliché par un deuxième étage de transformée de Fourier, seules les régions correspondant à la condition précédente seront illuminées. On obtient ainsi des franges d'égale composante de déplacement correspondant à  $d = n \frac{\lambda f}{a}$  ( $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ ) où  $a$  est la distance du trou à l'axe.

Le grand attrait de la photographie du speckle est son énorme simplicité et son faible coût, puisque le laser utilisé pour l'éclairement ne doit pas avoir une longueur de cohérence très importante. En revanche, ces techniques sont limitées à l'analyse de la composante de déplacement perpendiculaire à la ligne de vue, et ce, pour des surfaces assez planes. D'autre part, puisque le déplacement doit être plus grand que le speckle, le déplacement doit donc atteindre quelques dizaines de microns. Il s'agit donc d'une technique complémentaire à l'interférométrie holographique, beaucoup plus sensible.

### 2.2.2. Speckle en astronomie 79,80

La caractérisation des étoiles doubles est très probablement la plus belle des applications du phénomène de speckle.

Il est bien connu que la résolution des grands télescopes est limitée par la turbulence de l'atmosphère. Un télescope de 5 m a une résolution théorique de 0.02" mais la turbulence la limite à environ 1". Ceci est vrai pour les clichés longuement exposés mais pas pour un cliché exposé pendant un temps court par rapport aux temps caractéristiques du scintillement dû à l'atmosphère. Ces clichés à court temps de pose auront un aspect "specklé"

et chaque grain aura une dimension donnée par la résolution ultime du télescope.

Imaginons maintenant que l'étoile soit double. Chaque petit grain va être dédoublé et le spectre de Fourier du cliché va donc comporter des franges de Young. En augmentant le rapport signal/bruit par moyennage sur les spectres d'un grand nombre de photos, on arrive à mesurer avec précision les caractéristiques du doublet sans vraiment le voir.

### 3. APPLICATION DES TECHNIQUES DE SPECKLE EN MECANIQUE DES FLUIDES

#### 3.1. Application aux photographies de champs de particules

On vient de voir que le phénomène de speckle peut servir à "marquer" une surface par une "microstructure" ayant une taille caractéristique de quelques microns ou de quelques dizaines de microns. Néanmoins, comme on a pu le constater aux II.1 et II.2., le principe même de l'obtention de franges de Young ne dépend pas de la nature exacte de la microstructure. Rien n'empêche de déposer sur une surface des grains de petites dimensions englués dans de la peinture rétroréfléctive. Illuminé en lumière blanche, ces grains peuvent jouer le rôle du speckle dans les techniques photographiques décrites au II.2.1. <sup>81,82</sup>.

D'autre part, les surfaces rugueuses ne sont pas les seules à posséder des propriétés diffusantes suffisantes pour produire un speckle. Les propriétés de diffusion de solides transparents peuvent aussi être mises à profit. En éclairant l'intérieur d'un solide transparent comme le Plexiglas par une "tranche lumineuse", on peut analyser le champ de déplacement à l'intérieur de ce solide <sup>83,84</sup>.

Combiner ces deux idées pour mesurer un champ de vitesse d'un écoulement fluide était, on le comprend aisément, assez logique et tentant. C'est pourquoi, dans les années 1977-78, ont paru une série d'études de "faisabilité" concernant l'application du principe de la photographie de speckle en mécanique des fluides <sup>85-90</sup>. Ces premières publications <sup>85-88</sup> ne visaient qu'à vérifier que des franges pouvaient effectivement être obtenues dans un cas simple (écoulement liquide de Poiseuille). La plupart des auteurs <sup>86-88,90</sup> essayaient de produire un véritable speckle en ensemençant le liquide avec des billes de polystyrène, de la peinture

latex, des particules d'oxide d'aluminium ou même du lait <sup>87</sup>!

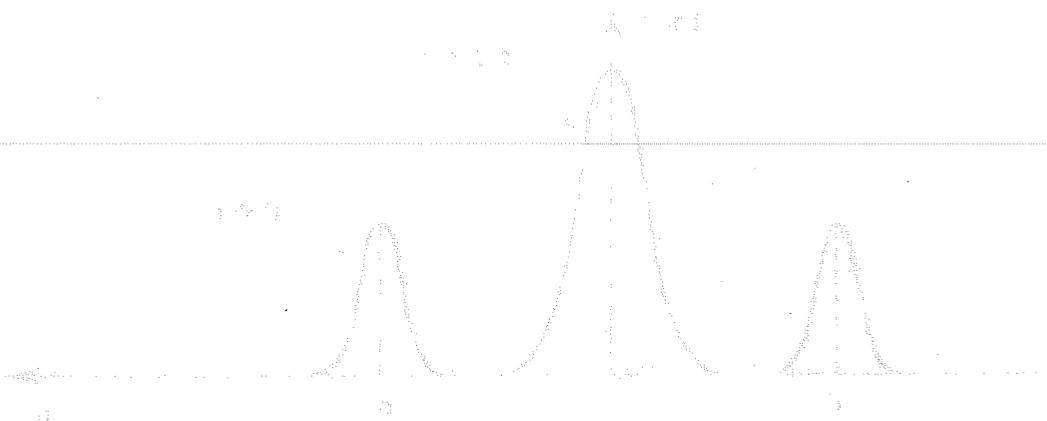
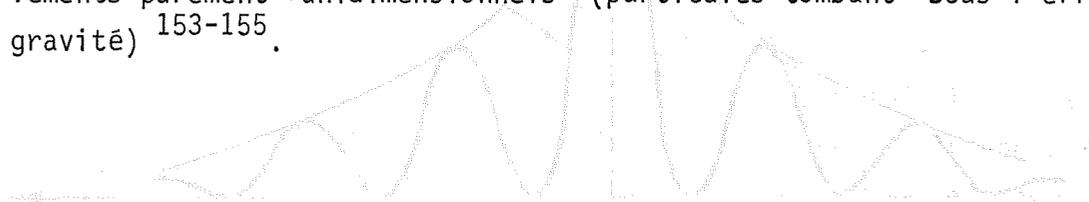
On s'est rapidement aperçu que cette procédure comportait un désavantage : la production d'un speckle nécessite une assez grande densité de particules si on ne désire pas travailler avec une ouverture trop réduite de l'objectif photographique. A cause de phénomènes de diffusion multiple, le faisceau d'éclairement risque de perdre sa cohérence spatiale <sup>86</sup>. En plus, l'écoulement est perturbé par la forte densité de particules. Même si ce défaut peut être combattu par l'utilisation de particules de très faible diamètre, un speckle de quelques microns nécessite l'emploi de plaques holographiques peu sensibles. Le désir de pouvoir utiliser une densité moindre de particules et des émulsions un peu plus sensibles ont amené les utilisateurs ultérieurs à utiliser une technique d'ensemencement plus proche du speckle en lumière blanche <sup>81-82</sup>. Cette fois les particules traçantes sont résolues par le système optique et ce sont leurs images successives qui produisent les franges de Young. <sup>98-100</sup> La possibilité d'éclairer les particules traçantes en lumière non cohérente a amené quelques auteurs à concevoir une véritable version fluide de la "white light speckle technique" <sup>91,97</sup>.

### 3.2. Application aux hologrammes des champs de particules

Il a été suggéré dans la littérature <sup>85,153-155</sup> d'utiliser une technique très proche de celle de la photographie de speckle pour analyser des hologrammes de champ de particules. Imaginons qu'un hologramme d'une "tranche" d'écoulement ensemencé ait été enregistré en double exposition avec un montage "off-axis". Lors de la restitution (Fig.II.8.) de l'image réelle, les cônes de lumière formant l'image des particules peuvent interférer entre eux et donner des franges tout-à-fait analogues aux franges de Young <sup>85</sup>. Avec plus d'un couple de particules dans une région isolée par un masque, toutes ces franges doivent, à l'infini, se localiser au même endroit. Néanmoins, cet effet est difficilement observé dans la pratique, toutes les franges semblant se "brouiller" pour ne plus laisser qu'un speckle. Cet effet peut sans doute être expliqué en se souvenant que chaque particule est reproduite avec sa propre phase et que deux phénomènes peuvent affecter celle-ci :

- i) Si l'écoulement admet un gradient de vitesse longitudinal, les franges auront une localisation variable. Une variation de déplacement d'une demi-longueur d'onde (ce qui n'est pas grand chose) est suffisante pour faire bouger transversalement les franges d'une demi-période.
- ii) En cas de reconstitution avec une variation de longueur d'onde ou de mauvais repositionnement de la plaque, les fronts d'onde seront multipliés par un terme de phase (aberrations) dépendant de la position de l'image.

Pour ces raisons, l'holographie souffre de ses avantages : c'est l'information de phase qui permet de reconstituer la troisième dimension mais qui rend difficile la formation de franges permettant une mesure facile du déplacement. Notons que les exemples parus dans la littérature, sont des écoulements purement "unidimensionnels" (particules tombant sous l'effet de la gravité) <sup>153-155</sup>.



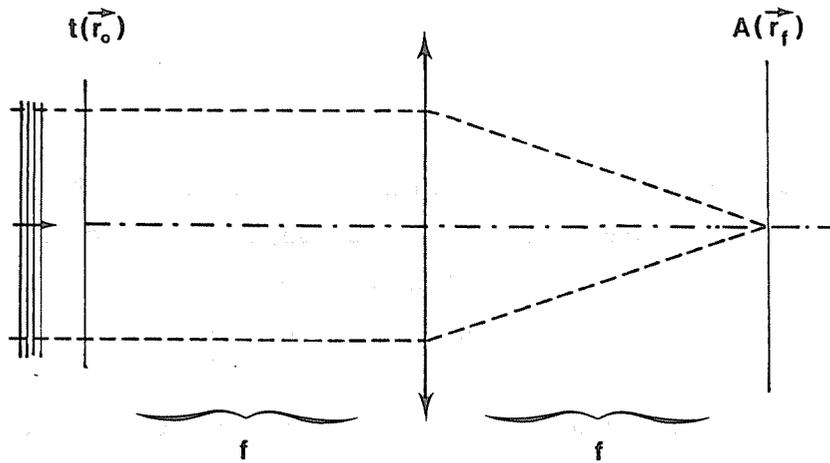


Fig.II.1. Transformée de Fourier à deux dimensions par l'optique cohérente.

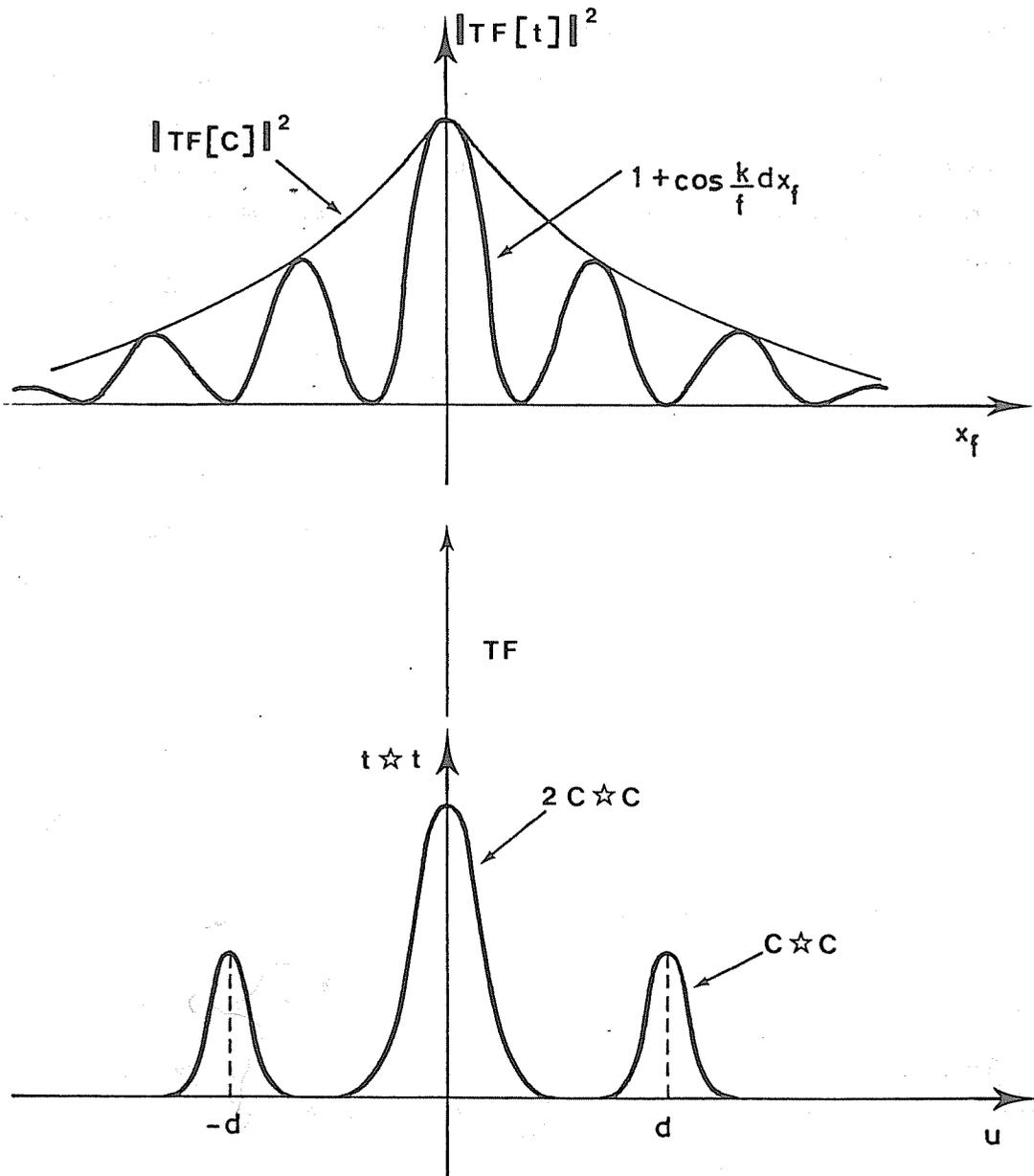


Fig.II.2. "Fringes de Young" obtenues au moyen du montage de la fig.II.1. Le phénomène est réduit à une dimension dans la schématisation.

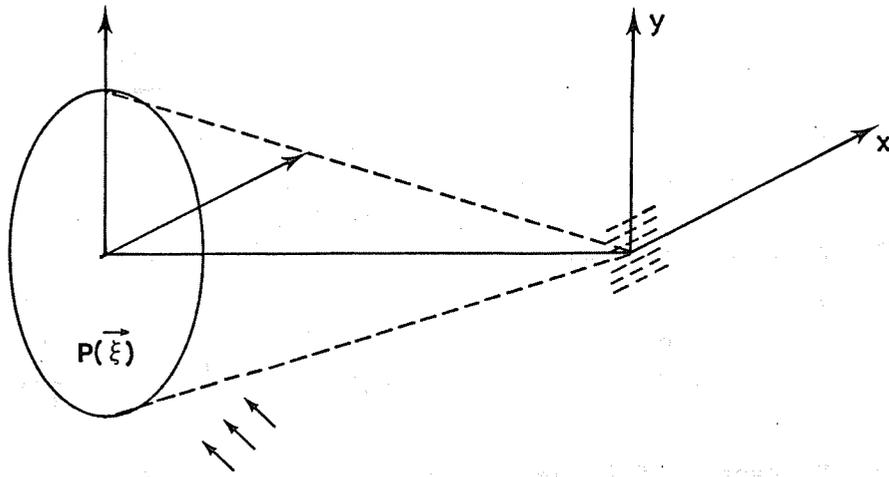


Fig.II.3. Formation de franges de Young par les points les plus éloignés de la surface illuminée.

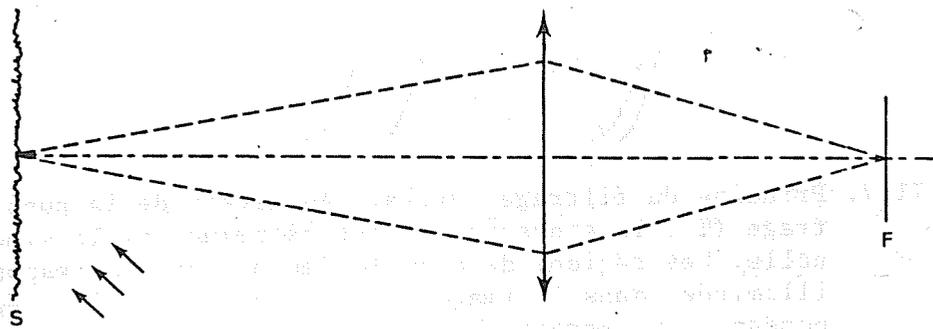
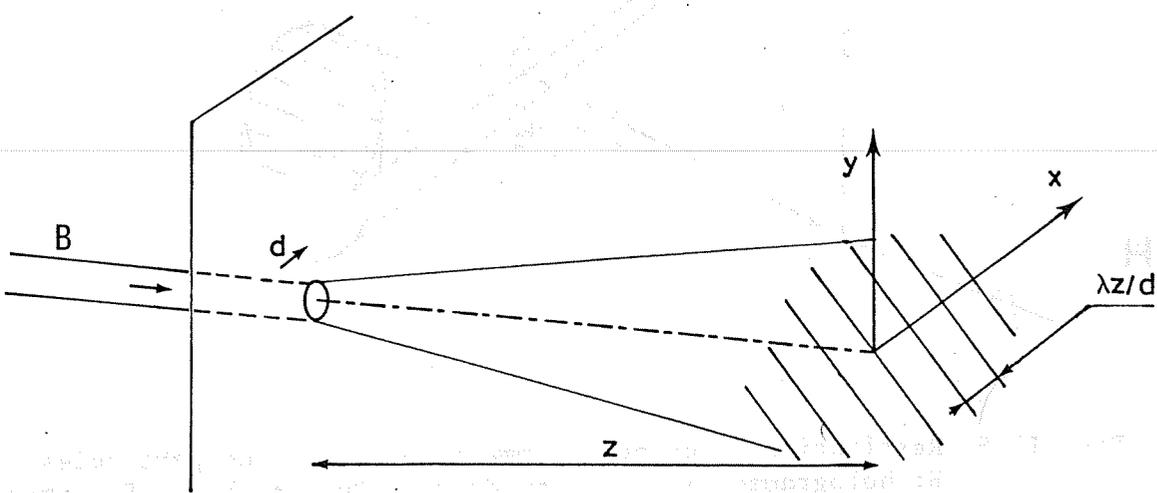


Fig.II.4 Montage de prise de vue en photographie de speckle .  
S: surface rugueuse; F: plan du film photographique.

Fig.II.5 Analyse du cliché enregistré au moyen du montage de la fig.II.4.  
B: faisceau laser



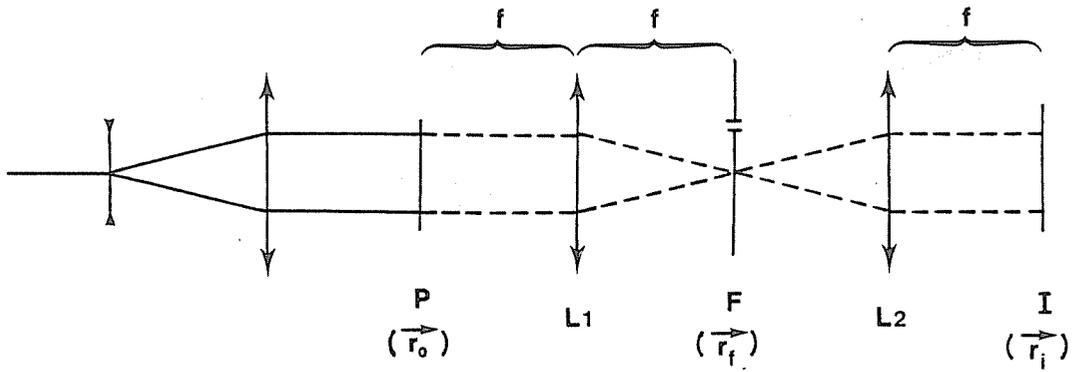


Fig.II.6. Montage de filtrage spatial par double diffraction.  
 P: transparence à filtrer; -F: plan de Fourier; I: plan image.

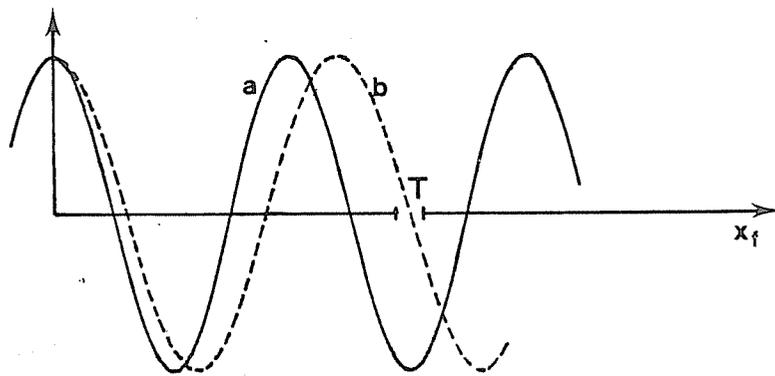


Fig.II.7. Principe du filtrage spatial. Au niveau de la pupille de filtrage (T), la sinusoïde a) est extrême et la sinusoïde b) est nulle. Les régions de P où le déplacement correspond à a) seront illuminées dans l' image filtrée tandis que les régions correspondant à b) seront obscures.

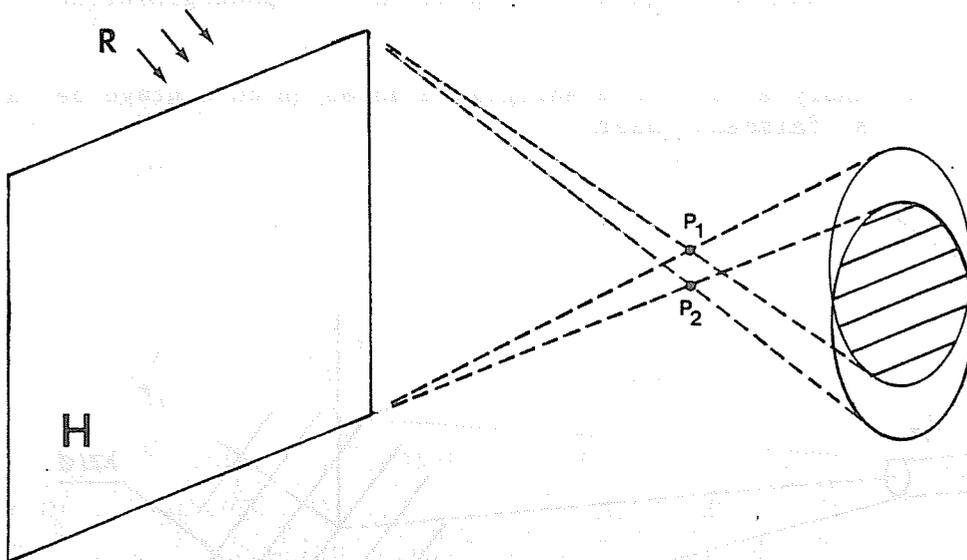


Fig. II.8. Restitution d' un hologramme d' un couple de particules.  
 H: hologramme; R: faisceau de restitution;  $P_1$  et  $P_2$ : images holographiques.

## CHAPITRE III : ENREGISTREMENT DES CLICHES

1. ILLUMINATION DE L' ECOULEMENT1.1 Aspect spatial

Quelques soient les particules ensemençant l' écoulement, une illumination correcte de celui-ci est une condition capitale pour la réussite d' une expérience de vélocimétrie. Puisque la profondeur de champ de l' objectif photographique est de toute manière limitée, il est logique de limiter l' éclairage à la "tranche" de fluide observée. Comme on a pu le remarquer au chapitre précédent, une simple source de lumière blanche peut parfaitement convenir. C' est d' ailleurs ainsi que les visualisations classiques sont effectuées depuis un siècle. Si ce procédé a l' avantage d' être bon marché, il ne permet d' obtenir des "tranches" lumineuses très fines qu' au prix d' une faible densité d' énergie. Il s' agit là d' un effet de la cohérence spatiale réduite de ces sources qui empêche de concentrer convenablement le faisceau. C' est pourquoi l' utilisation des lasers se révèle très avantageuse. Notons qu' il est important de faire la distinction classique entre cohérence spatiale et temporelle. Le laser utilisé peut avoir une cohérence temporelle limitée (oscillation sur plusieurs modes longitudinaux) mais doit avoir une bonne cohérence spatiale, ce qui est facile à satisfaire, la quasi totalité des lasers commerciaux fonctionnant en mode transversal  $T_{EM00}$ .

La génération d' un feuillet lumineux cohérent requiert une bonne compréhension de la propagation de faisceaux gaussiens à travers l' espace et à travers des éléments optiques. C' est ce que nous allons décrire dans les pages suivantes. En plus on étudiera le problème des pertes de lumière par réflexion et les aberrations.

1.1.1. Propagation d' un faisceau gaussien dans le vide

Considérons un faisceau de profil gaussien (Fig.III.1). On sait que ce profil gaussien se conserve au cours de la propagation. Dans tout plan perpendiculaire à l' axe de propagation, l' amplitude lumineuse s' écrit:

$$A(\vec{r}) = \exp(-r^2/w^2)$$

On sait <sup>101</sup> que ce faisceau se comporte comme un hyperboloïde de révolution et que le rayon  $w$  où l' intensité lumineuse vaut  $e^{-2}$  fois l' intensité sur l' axe obéit à l' équation

$$w^2 = w_0^2 \left( 1 + \left( \frac{\lambda z}{\pi w_0^2} \right)^2 \right) \quad (1)$$

le rayon de courbure vaut

$$R = z \left( 1 + \left( \frac{\pi w_0^2}{\lambda z} \right)^2 \right) \quad (2)$$

où  $w_0$  est le rayon dans le plan du "beam waist" où le front d'onde est plan.

Si  $z \gg \frac{\pi w_0^2}{\lambda}$  (distance de Fresnel), on a :

$$w \approx \frac{z \lambda}{\pi w_0}$$

ou inversement

$$w_0 \approx \frac{\lambda z}{\pi w} \quad (3)$$

La divergence sera

$$\theta = \frac{2\lambda}{\pi w_0} \quad (4)$$

En introduisant le nombre  $F = \frac{z}{2w}$ , on peut calculer le diamètre du "beam waist" connaissant ce nombre  $F$  et la distance  $d$

$$\Phi = 2 w_0 = \frac{4\lambda}{\pi} F = 1.27 \lambda F \quad (5)$$

Cette formule doit être comparée à la formule équivalente pour le cas où le profil à la distance  $z$  est circulaire uniforme

$$\Phi_c = 2.4 \lambda F \quad (6)$$

Il est à noter que cette comparaison est relativement subjective. Dans le cas d' un faisceau gaussien, le rayon est la distance à laquelle l'intensité a diminué d' un facteur  $e^2$ . Pour un profil circulaire uniforme, le rayon est la distance à l' axe du premier zéro.

Il est important de remarquer que l'amplitude du faisceau gaussien est séparable dans des coordonnées orthogonales ( $\exp(-r^2/w^2) = \exp(-x^2/w^2) \cdot \exp(-y^2/w^2)$ ).

D'autre part, à l' approximation de Fresnel, la fonction de transfert de propagation est elle aussi séparable dans ces coordonnées<sup>66</sup>, les formules (1) et (4) restent valables pour une focalisation dans une direction pour une lentille cylindrique (Fig.III.1). Dans ce cas, le paramètre  $w$  désigne la "demi-épaisseur" de la tranche.

A partir de l'équation (1) on peut aussi calculer la "profondeur de focalisation", c'est-à-dire la distance  $\Delta$  (Fig.III.1) sur laquelle le faisceau reste convenablement focalisé.

Prenons par exemple comme limite de bonne focalisation la distance où la densité d'énergie sur l'axe de la gaussienne a diminué d'un facteur deux.

-Pour un faisceau gaussien axisymétrique, il faut calculer la distance  $\delta$  au bout de laquelle  $w^2 = 2 w_0^2$

On a donc

$$2 w_0^2 = w_0^2 \left( 1 + \left( \frac{\lambda \delta}{\pi w_0^2} \right)^2 \right) \quad (7)$$

$$\Delta = 2 \delta = 2 \frac{\pi w_0^2}{\lambda} = \frac{8}{\pi} \lambda F^2 \quad (8)$$

-Pour un faisceau gaussien focalisé dans un plan, la distance  $\delta$  correspond

$$4 w_0^2 = 2 w_0^2$$

$$4 w_0^2 = w_0^2 \left( 1 + \left( \frac{\lambda \delta}{\pi w_0^2} \right)^2 \right) \quad (9)$$

$$\Delta = 2 \delta = 2 \sqrt{3} \frac{\pi w_0^2}{\lambda} = \frac{8\sqrt{3}}{\pi} \lambda F^2 \quad (10)$$

Le tableau 1 résume les résultats précédents pour une tranche lumineuse de profil gaussien.

F	$\Phi$ μm	$\Delta$ mm
76	50	13
153	100	52
306	200	206
765	500	1250

Tableau 1.

### 1.1.2 Propagation d'un faisceau gaussien à travers une lentille

Quand un faisceau laser à profil gaussien traverse une lentille, il faut se garder de penser qu'il va se focaliser dans le plan de l'image géométrique du beam-waist du faisceau incident. Cet effet est dû au fait qu'un faisceau gaussien ne peut être considéré comme un point source que sous certaines conditions exposées à l'annexe I. Résumons simplement les conclusions de cette annexe:

1/ Si le beam-waist objet est situé dans le plan focal avant, le beam-waist "image" sera toujours situé dans le plan focal arrière.

2/ On définit un paramètre de Fresnel  $f_F = \frac{\pi w_0^2}{\lambda}$

Si on a (voir Fig. III. 2)

$$\left\{ \begin{array}{l} f_F^2 \ll (d_0 - f)^2 \\ f_F^2 \ll (d_0 - f)^2 d_0 / f \end{array} \right. \quad (11)$$

$$\text{ou bien } f_F^2 \gg (d_0 - f)^2 \quad (12)$$

alors le faisceau se comportera comme si les lois de l'optique géométrique lui étaient applicables. Ces deux conditions expriment simplement qu'un faisceau fortement concentré ( $f_F$  petit) peut être considéré comme provenant d'un point source et qu'un faisceau fortement agrandi ( $f_F$  grand) se comporte comme une onde plane.

Il est à noter que le paramètre  $f_F$  est très loin d'être négligeable pour un faisceau sortant d'un oscillateur laser conventionnel. Par exemple pour  $w_0 = 0,5 \text{ mm}$  et  $\lambda = 6328 \text{ \AA}$ , on a  $f_F = 1.24 \text{ m}$ .

Ces considérations n'ont pas beaucoup d'importance quand on travaille avec un laser continu pour application à basse vitesse. En effet, on "voit" bien où va le faisceau. Par contre, quand on utilise un laser à rubis, le montage optique doit être ajusté en s'aidant d'un laser He-Ne dont l'axe est collinéaire avec celui du laser pulsé. Les divergences des deux lasers étant différentes, il n'est pas du tout évident que leur comportement sera identique. Pour résoudre ce problème, on peut définir la règle suivante: les lentilles doivent toujours servir, soit à très fortement réduire soit à très fortement augmenter la divergence des faisceaux. Le paramètre  $f_F$  à la sortie de la lentille sera ainsi toujours très petit ou très grand, ce qui aidera à aborder la lentille suivante dans de bonnes conditions.

### 1.1.3 Les aberrations chromatiques

L'usage d'un laser à rubis réserve une autre source de surprise. Pour des raisons de coût, les éléments utilisés (généralement en verre BK7) sont des lentilles simples qui ont un comportement différent à la longueur d'onde du laser d'alignement (6328 Å). On sait que la focale d'une lentille mince est donnée par

$$1/f = (n-1)(1/R_1 - 1/R_2) \quad (13)$$

où  $R_1$  et  $R_2$  sont les rayons de courbure des faces de la lentille. Si la divergence et la position du faisceau incident sont telles que la position des beam waists sont reliées par la relation  $1/d_i + 1/d_0 = 1/f$  (voir III.1.1.1),

on a, au premier ordre

$$\Delta d_i = \Delta f d_i^2 / f^2 \quad (14)$$

$$\text{ou } \Delta d_i / d_i = -(d_i / f) \frac{\Delta n}{n-1} \quad (15)$$

On voit que l'on a intérêt à garder  $d_i$  petit. Si on prend pour référence les valeurs obtenues avec  $\lambda=6328 \text{ \AA}$  ( $n=1.5151$ ), l'écart observé à  $\lambda=6943 \text{ \AA}$  ( $n=1.5132$ , voir <sup>105,106</sup>) sera, pour  $d_i = f$  :

$$|\Delta d_i / d_i| = 0.004$$

ce qui est négligeable. Par contre l'écart grandit très fort quand  $d_i$  augmente. Toutefois, comme au III.1.1.1., la limite pour  $d_i$  très grand ne pose pas de gros problème. En effet, dans ce cas, on produit un faisceau quasi plan qui sera, de toute façon, focalisé près du foyer par la lentille suivante. C'est la même conclusion qui avait déjà été obtenue pour l'"aberration" longitudinale due au profil gaussien du faisceau.

Pour pouvoir focaliser le faisceau au foyer de la dernière lentille, il faut posséder un nombre important de lentilles cylindriques de longue focale. Un système beaucoup plus souple, qui a été intensivement utilisé dans la pratique est schématisé à la figure III.3.: deux lentilles de courte focale et d'espacement ajustable permet de focaliser le faisceau à une distance arbitraire. Ce montage, qui est très simple à employer, est beaucoup plus sensible aux aberrations chromatiques, puisque le rapport  $d_i/f$  de la dernière lentille est grand. Illustrons-le avec les données numériques de la figure III.3. On a

$$f_{6943} / f_{6328} = (n_{6328} - 1) / (n_{6943} - 1) = 1.0037$$

Si les focales sont données à  $6328 \text{ \AA}$ , pour la lentille L1, on obtient  $\Delta f = 0.74 \text{ mm}$ . Si la distance de focalisation désirée à  $6328 \text{ \AA}$  est de  $1 \text{ m}$ , la distance A-L2 ( $d_0$ ) doit être:

$$1/d_0 + 1/1000 = 1/100$$

donc  $d_0 = 111.11 \text{ mm}$ .

La distance de focalisation à  $6943 \text{ \AA}$  sera alors donnée par

$$1/(111.11 - 0.74) + 1/d = 1/(100 \times 1.0037)$$

on obtient:  $d = 112 \text{ mm}$ , soit un écart  $\Delta d / d$  de 12%.

#### 1.1.4. Aberrations géométriques

Si on est condamné à travailler avec des lentilles simples, il convient de limiter au maximum les aberrations géométriques qui peuvent être très importantes si on ne prend pas de précautions. On trouvera dans <sup>4,107</sup> un exposé théorique sur les aberrations et dans <sup>106</sup> un excellent exposé pratique.

Remarquons tout de suite que pour la formation d'une tranche lumineuse, les faisceaux ne sont jamais inclinés sur l'axe. Seule l'aberration sphérique joue donc un rôle appréciable. Cette observation faite, on peut se définir deux règles à appliquer usuellement:

- 1/ Les divergences des faisceaux doivent être maintenues les plus faibles possibles. Il est noté que ce principe est en contradiction avec les conclusions des III.1.1.2 et III.1.1.3 quand on veut focaliser un faisceau. Il y a là un équilibre à maintenir entre ces deux exigences contradictoires. Une règle de bonne pratique consiste à limiter le nombre  $F=f/\Phi$ , où  $\Phi$  est le diamètre du faisceau sur la lentille, à des valeurs plus grandes que vingt. <sup>106</sup>
- 2/ L'orientation des lentilles doit être bien choisie, la règle qualitative à suivre est la suivante: on minimise (et on ne supprime pas !) l'aberration sphérique en égalisant le mieux possible les angles d'incidence et d'émergence des rayons lumineux sur les faces de la lentille. On trouvera à la figure III.4 quelques exemples classiques de ce qu'il est recommandé de faire et de ce qui est à éviter.

Notons à ce sujet que pour une focalisation, la lentille de meilleure forme n'est pas la lentille plan-convexe, mais une lentille biconvexe de rayons de courbure inégaux (rapport des rayons de courbure: 6). On peut néanmoins constater que les performances de la lentille plan-convexe s'écartent très peu de celles de la lentille de meilleure forme.

#### 1.1.5. Les reflets

Le coefficient de réflexion d'une surface de verre non-traitée, à l'incidence normale, est d'environ 4 %. Une lentille simple a donc une transmission d'à peu près 92%. Si on utilise quatre lentilles, la perte s'élève à 28 %. Vu le "prix" de la lumière laser, il convient de limiter le nombre de lentilles au strict minimum ou bien d'utiliser, quand c'est possible, des lentilles traitées en surface par des dépôts diélectriques antireflets. Un dépôt multicouche permet de réduire le coefficient de réflexion à quelques

fractions de pour-cent.

Il existe une autre raison impérieuse d' éviter les réflexions lorsque l' on utilise un laser pulsé : la rétroaction de la lumière réfléchie avec le laser. Si ce phénomène n' est pas trop gênant pour les lasers continus comme le laser  $\text{Ar}^+$ , il peut être dramatique pour des lasers pulsés composés d' un oscillateur et d' un ou de plusieurs amplificateurs. La partie réfléchie du signal peut être amplifiée et se focaliser à l' intérieur d' un des barreaux de rubis, créant des dommages irréparables. Une technique simple pour éviter ce phénomène consiste à incliner très légèrement les lentilles de manière à renvoyer les reflets en dehors du laser. Cette mesure est très facile à prendre; en vérité, c' est plutôt le contraire qui est difficile à faire!

Toutefois, il y a quelques fautes à éviter à tout prix : ce sont les positions des lentilles où les reflets suivent exactement le chemin inverse du faisceau incident (Fig. III. 5a et 5b). On constate d' ailleurs que ces deux cas correspondent à des orientations déconseillées du point de vue des aberrations géométriques. L' orientation et la position des lentilles doit être choisie de manière à ce que l' onde réfléchie soit divergente ou focalisée à très courte distance ( Fig.III5c et 5d ). La majeure partie de l' onde réfléchie échappera ainsi à la lentille précédente. On trouvera à l' annexe II une étude plus détaillée des réflexions parasites.

#### 1.1.6 Exemple d' application

La fig. III.6 montre un exemple d' application de tout ce qui précède pour la formation d' une tranche lumineuse d' épaisseur  $200 \mu\text{m}$  et de hauteur  $40 \text{ mm}$  à partir d' un laser à rubis. C' est le montage qui sera utilisé pour l' expérience décrite au chapitre VI . Le laser à rubis (JK série 2000) se compose d' un oscillateur délivrant deux impulsions de  $15 \text{ mJ}$  (délai ajustable entre  $1$  et  $800 \mu\text{sec}$ ) et d' un amplificateur portant l' énergie par impulsion à  $50\text{-}60 \text{ mJ}$ . Le deuxième amplificateur, permettant d' obtenir une énergie de  $1 \text{ J}$  par impulsion n' est pas utilisé et a carrément été retiré. Ce montage doit satisfaire à plusieurs conditions:

- une distance entre le laser L et la zone d' expérience T d' environ  $3 \text{ m}$ .
- éviter de focaliser le faisceau en un point. Quoique les problèmes liés à l' ionisation de l' air par la forte densité de puissance du faisceau ne se posent pas avec un niveau d' énergie aussi réduit, le montage ainsi conçu pourrait fonctionner avec le deuxième amplificateur, si le besoin

s'en faisait sentir.

-Enfin, n'utiliser que des lentilles simples de focales standard (en dessous de 500 mm). La nécessité d'utiliser des lentilles dotées d'un traitement anti-reflets à 6943 Å ou de limiter les pertes au maximum si un tel traitement est impossible, impose le recours à des lentilles simples. Comme souligné au III.1.1.3, une combinaison de deux lentilles simples permet de réaliser une focale équivalente arbitraire.

Le principe du montage peut se décrire comme suit: la lentille L1 destinée à faire diverger le faisceau avant passage dans l'amplificateur produit un faisceau ayant un paramètre  $f_F$  assez petit (quelques mm). Comme le point image dû à L1 se trouve en deçà de L1 et donc à plus de 1 m de L2, les lois de l'optique géométriques sont applicables à L2.

Les deux premières lentilles sphériques (L2 et L3) servent à modifier la divergence du faisceau de manière à obtenir un faisceau de diamètre 40 mm dans la zone d'expérience. On constate que la face avant de L2 produit une onde réfléchie divergente et la face arrière produit une onde qui converge à une distance égale à la moitié de la focale (125 mm)(Annexe II). Passé ce point, l'onde devient divergente et ne constitue pas un danger pour le laser.

La lentille L3 pose un problème plus compliqué, son sens ayant été choisi de manière à minimiser les aberrations. La réflexion sur la face avant est une onde convergente qui n'est néanmoins pas dangereuse parce que le foyer est situé en deçà de la lentille L2 et est divergente à la sortie de celle-ci.(voir gros-plan Fig.III.7)

Les positions et l'écartement des lentilles cylindriques L4 et L5 sont choisis de manière à obtenir l'ouverture du faisceau nécessaire à former la ligne focale d'épaisseur souhaitée(Tableau 1, point III.1.1.1). La distance entre L3 et L5 ( $\approx 50$  cm) et le fait que L3 soit une lentille divergente assure que la réflexion sur la face arrière de L4 ne présente pas de dangers.

Etant donné une distance L5-T d'environ 1200 mm, l'épaisseur du faisceau sur L5 sera d'environ 5 mm et sur L4 d'environ 10 mm(rapport des focales).

L'épaisseur (e) de la ligne focale intermédiaire entre L4 et L5 sera donc d'environ 16 mm. Le nombre de Fresnel correspondant sera donc  $\pi^2/4\lambda = 0.35$ mm.

L'exemple numérique du III 1.1.3 peut donc s'y appliquer (les valeurs numériques y avaient été choisies à dessein pour s'appliquer au cas présent).

Il est réconfortant de constater que les prévisions de cet exemple se vérifient très bien. On trouve effectivement que le foyer He-Ne se trouve bien une dizaine de cm en deçà du foyer du faisceau à 6943 Å. La localisation de ce foyer est rendue plus difficile par ce phénomène. On peut très facile-

ment résoudre ce problème en utilisant un papier noirci que l'on déplace longitudinalement jusqu'à ce que l'empreinte laissée par le faisceau y soit fine et profonde.

Notons un dernier détail: la polarisation. Les lasers sont en général polarisés et celui décrit dans cet exemple l'est perpendiculairement au plan de la Fig. III.6. On verra plus loin que cette orientation de la polarisation (perpendiculaire au plan de diffusion défini par les directions incidente et de diffusion) correspond à un optimum pour la diffusion de la lumière par des particules de très petite dimension ( $\text{rayon} < \lambda$ ).

## 1.2 Aspect temporel

Après avoir mis en forme le faisceau laser et lui avoir donné la hauteur, l'épaisseur et donc la profondeur de focalisation désirées, il est nécessaire de moduler temporellement ce faisceau. Deux options se présentent: la modulation externe ou interne d'un laser continu ou l'utilisation de lasers pulsés. Ces deux techniques ont des champs d'application très différents, comme nous allons le voir dans les lignes qui suivent.

### 1.2.1. Modulation de lasers continus

Cette solution assez simple parce qu'utilisant des lasers généralement disponibles dans des laboratoires d'analyse de contraintes ou de mécanique des fluides, ne s'applique qu'aux écoulements à basse vitesse ( $< 1 \text{ cm/sec}$ ). En effet, avec un laser  $\text{Ar}^+$  "courant" (2 W à  $5145 \text{ \AA}$ ), une impulsion doit avoir 20 msec pour atteindre une énergie de 40 mJ. Comme l'écoulement doit être "figé" par l'impulsion lumineuse et que le temps séparant deux impulsions doit être sensiblement plus grand que la longueur d'une impulsion (citons cinq à dix fois pour fixer les idées), on constate facilement que la vitesse de l'écoulement doit être limitée à quelques mm/sec. Si on admet une longueur d'impulsion de 10 msec et un "flou" de  $10 \text{ \mu m}$ , la première condition nous donne une vitesse de 1 mm/sec. Si on admet que le temps entre deux impulsions doit être cinq fois plus grand que la longueur d'une impulsion et que le déplacement peut aller jusqu'à  $200 \text{ \mu m}$ , on obtient une vitesse limite de  $0.2/0.05 = 4 \text{ mm/sec}$ .

Ces valeurs sont bien entendu données pour un laser "courant" et un agrandissement photographique de 1:1. L'utilisation de lasers plus puissants et

une réduction photographique (au prix d' une perte de résolution spatiale dans l' analyse des vitesses) permet de remonter cette limite. Il est très important de signaler que les vitesses qui viennent d' être citées sont typiques des écoulements de convection et que ce mode de production d' impulsions a donc une importance pratique non négligeable.

L' énorme avantage des lasers continus découpés réside dans la possibilité de produire un grand nombre d' impulsions consécutives. L' intérêt d' illuminer l' écoulement avec une suite d' une dizaine d' impulsions est double. D' une part, la densité "apparente" de particules est multipliée. On peut donc réduire la concentration de particules traçantes. D' autre part, on verra au chapitre IV que la succession de plus de deux images produit des franges plus énergétiques et plus fines, ce qui améliore le rapport signal sur bruit.

Comment "découper" un laser continu? La modulation interne du courant n' étant guère recommandable, on est amené à utiliser des systèmes externes. Les premiers essais (expérience du V.2) ont été réalisés avec un découpeur électrooptique composé d' une cellule de Pockels et d' un polariseur Glan-Taylor. Ce système a l' avantage de pouvoir fonctionner à haute fréquence mais les pertes cumulées atteignent une dizaine de pourcent et la cellule de Pockels à effet transverse utilisée a un angle d' ouverture très réduit. Vu les difficultés d' alignement du système, on s' est alors tourné vers un système plus "rustique" mais sans perte, sans problème d' alignement et de coût négligeable: une roue tournante mue par un moteur à vitesse variable. Une série d' échancrures pratiquées dans la roue permet de bloquer et transmettre le faisceau. Ce système de découpage l' emporte très largement sur ses équivalents électrooptiques si on ne désire pas des impulsions très courtes à haute fréquence, ce qui est bien notre cas.

### 1.2.2. Utilisation de lasers pulsés.

Comme on a pu le remarquer au point précédent, l' utilisation de lasers continus découpés constitue un grand gaspillage d' énergie. Le laser fonctionnant en continu, la majeure partie de l' énergie est perdue. Les lasers pulsés résolvent ce problème en incluant l' ensemble cellule de Pockels + polariseur à l' intérieur de la cavité.

Un laser à rubis pompé avec des lampes flash peut ainsi fournir des couples d' impulsions courtes (30 nsec) et d' énergie importante ( quelques mJ à plusieurs J) séparées par un délai compris entre 1 et 800  $\mu$ sec. Ces valeurs du délai montrent que les lasers pulsés sont réservés aux applications à

plus haute vitesse (de quelques dizaines de cm/sec à quelques centaines de m/sec). Le gros défaut des lasers à rubis réside dans le faible taux de répétitions des impulsions. Pour des raisons thermiques, il faut attendre plusieurs secondes pour pouvoir pomper à nouveau le rubis. Actuellement de grands espoirs sont portés vers les lasers Nd:Yag qui peuvent fonctionner dans les mêmes conditions avec une fréquence de répétition beaucoup plus haute (plusieurs dizaines de Hertz).

Le laser disponible ne peut fournir que deux impulsions consécutives, ce qui limite assez bien les performances. Il faut cependant noter que, fonctionnellement, rien n'empêche d'ouvrir l'interrupteur électrooptique plus de deux fois, même si la production de plus de quatre impulsions paraît difficile. Quelques modèles à trois ou quatre impulsions existent d'ailleurs sur le marché.

## 2. LE DISPOSITIF PHOTOGRAPHIQUE

### 2.1. Description et alignement

Le dispositif photographique est la partie la plus simple du montage. Un simple appareil reflex 24 x 36 muni d'un macroobjectif monté sur un soufflet convient très bien. Il convient d'insister sur le côté pratique du montage, la visée reflex permettant une mise au point facile et le système d'avancement du film permettant un "tir en rafales" aisé. En plus, le choix d'un film est relativement aisé vu la grande diversité des films disponibles (à faible coût) dans ce format. Le champ est évidemment limité, mais l'usage de chambres photographiques de grandes dimensions peut résoudre ce problème.

Pour des applications à basse vitesse, la mise au point ne pose pas de problème puisqu'on peut envoyer le faisceau en continu dans l'écoulement et observer les particules à travers l'oculaire. Par contre, l'utilisation d'un laser pulsé pose de nombreux problèmes. Dans ce cas, l'alignement et la mise au point se font en deux temps: il s'agit de rendre l'axe de l'objectif perpendiculaire à la tranche lumineuse et puis d'effectuer la mise au point proprement dite. L'orientation de l'appareil se fait en s'aidant du faisceau He-Ne d'alignement. Pour se faire, on peut s'aider d'un dispositif d'alignement composé de deux fentes que l'on visse sur le porte-soufflet (Fig.III.8).

Une fois que la perpendicularité est assurée, il suffit de mettre au point sur une petite portion du champ. Comme on ne peut faire confiance au faisceau He-Ne, on dispose dans le champ (en absence de l'écoulement) une feuille de

papier noirci orientée à  $45^\circ$  par rapport à l'axe de l'appareil (Fig.III.9). Le faisceau du laser pulsé y brûle une fine empreinte sur laquelle il est très aisé de se mettre au point.

## 2.2. Résolution, profondeur de champ et choix du film

Un objectif macro courant (Canon macro 50 mm) ouvert à  $f/4.5$  produit un profil de diffraction de diamètre  $\Phi = 2.4 \lambda (2 \times 4.5) = 15 \mu\text{m}$  (voir éq. III.6) à  $6943 \text{ \AA}$  et pour un agrandissement 1:1. Comme nous le verrons un peu plus loin, les particules traçantes utilisées doivent avoir un diamètre qui n'excède pas quelques microns. Elles seront donc vues comme des sources ponctuelles par le système optique et leur image sera le profil de diffraction d'une ouverture circulaire. Il faut se rendre compte que ce point n'est pas aussi évident qu'il n'en a l'air. Le profil angulaire de diffraction d'une particule sphérique présente des lobes dont le nombre est fonction du rayon<sup>4,109,110</sup>. Néanmoins, comme le nombre de lobes est assez réduit pour une particule de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde et que l'angle sous-tendu par l'objectif est faible ( $\approx 6^\circ$  pour les mêmes données que plus haut), la particule diffractante sera essentiellement vue comme une source ponctuelle. Ce raisonnement est bien sûr uniquement qualitatif et ne tient pas compte des particularités de la diffusion à  $90^\circ$ . Néanmoins, ses prédictions sont bien vérifiées par l'expérience si on tient compte des particularités de l'enregistrement photographique. En effet, les particules ont des brillances très différentes à cause de leurs diamètres différents et de leurs positions aléatoires dans l'épaisseur gaussienne de la tranche. A cause de la mauvaise dynamique des films photographiques, le nombre de particules surexposées et sous-exposées sera loin d'être négligeable. Cet effet (et les effets de diffusion à  $90^\circ$  cités plus haut) combiné aux résidus d'aberrations de l'objectif expliquent que, expérimentalement, les diamètres des images varient entre 10 et  $30 \mu\text{m}$ .

Pour une ouverture donnée, un objectif a une profondeur de champ limitée. Cette profondeur doit évidemment être plus grande que l'épaisseur de la tranche lumineuse. On peut le vérifier en examinant les courbes donnant la répartition de l'intensité à proximité du foyer (Fig.III.10 extraite de<sup>4</sup>). On démontre<sup>11,111</sup> que l'intensité le long de l'axe longitudinal peut s'écrire

$$I(u) = \left( \frac{\sin u/4}{u/4} \right)^2 I_0 \quad (16)$$

$$\text{avec } u = k(a/d_j)^2 z \quad (17)$$

où  $a$  est le rayon de la pupille,  $d_j$  la distance du foyer à la pupille et

z l'écart par rapport au foyer.

Si on prend le même critère que précédemment (intensité diminuée de moitié), la limite de résolution sera donnée par

$$\frac{\sin u/4}{u/4} = 1/\sqrt{2}$$

ou encore  $u/4 \approx 1.39$  ou  $u = 5.56$

Donc la tolérance  $\Delta$  sera

$$\Delta = 2z = 5.56 (2/k) (d_i/a)^2$$

avec  $d_i/a = 18$  et  $\lambda = 6943 \text{ \AA}$

on obtient  $\Delta \approx 0.4 \text{ mm}$ .

Vu la dimension des images des particules, on n'a pas besoin de film à très haute résolution comme en holographie. On a même tout intérêt à bien adapter la résolution du film aux dimensions caractéristiques de l'image, puisque la résolution et la sensibilité des émulsions sont liées. Dans notre cas, on utilisera au mieux la lumière diffusée en employant un film résolvant 200 à 300 traits/mm. Pour le laser à  $\text{Ar}^+$  ( $5145 \text{ \AA}$ ), le choix s'est porté sur le film Agfa ortho 25 et pour le laser à rubis ( $6943 \text{ \AA}$ ), sur un film panchromatique de sensibilité étendue vers le rouge profond (Kodak Technical Pan 2415, sensibilité  $\approx 50 \text{ Asa}$ ).

### 2.3. Effets de perspective

A première vue, on peut penser qu'un montage comme celui de la Fig. I.3 va produire des photographies où le mouvement apparent des images des particules sera uniquement fonction de la projection des déplacements dans le plan éclairé. On constate aisément sur la figure III.11 que le mouvement longitudinal peut aussi produire un mouvement apparent<sup>82</sup>.

On a  $M = d_i/d_0$

$$d_i = f(1+M)$$

$$d_0 = f\left(\frac{1+M}{M}\right)$$

$$\text{donc } \Delta' \approx M \Delta R/d_0 = \frac{M^2 R}{(1+M)f} \Delta$$

avec  $M=1$ ,  $R=1 \text{ cm}$ ,  $f=50 \text{ mm}$  et  $\Delta=50 \text{ \mu m}$ , on obtient  $\Delta' = 5 \text{ \mu m}$ .

On voit que cet effet n'est pas très important pour les valeurs typiques citées plus haut, mais peut devenir important quand  $M$  augmente. Il peut être diminué "à volonté" en augmentant la focale de l'objectif.

### 3. CHOIX DES PARTICULES

#### 3.1. Comportement mécanique

Avant de discuter du comportement optique des particules ensemençant l'écoulement, il est nécessaire de définir leur dimension maximum. Une particule sphérique, à moins d'avoir exactement la même masse volumique, est un corps étranger au sein d'un fluide et ne va être emporté dans cet écoulement qu'avec un certain retard. On trouvera en annexe III, un résumé de l'analyse "classique" du comportement de ces particules dans l'hypothèse où le nombre de Reynolds caractérisant la particule  $R_{ep} = vD/\nu$  ( $\nu$ :vitesse relative entre le fluide et la particule;  $D$ :diamètre de la particule) est appréciablement plus petit que l'unité.

Résumons simplement les conclusions de cette annexe. Pour les liquides où on dispose de particules de masse volumique proche de celle du liquide, des particules de plusieurs microns suivent quasi parfaitement l'écoulement. Par contre, pour des écoulements gazeux où le spectre de fréquence de la turbulence s'étend sur plusieurs kilohertz, il est indispensable de maintenir le diamètre des particules en dessous du micron si on travaille avec des particules solides ou liquides de masse volumique proche de  $10^3 \text{ kg/m}^3$ . Pour des écoulements comme celui qui sera étudié plus loin où le contenu fréquentiel ne s'étend pas sensiblement au-delà de 1 kHz, des diamètres allant jusqu'à 2 à 3 microns peuvent encore être tolérés. Il s'agit là de la plage de fonctionnement habituelle des aérosols.

Après avoir examiné le comportement individuel des particules, disons quelques mots au sujet de leur comportement collectif. Les particules ne risquent-elles pas de perturber l'écoulement? La présente technique de vélocimétrie fonctionne généralement avec des densités de particules plus élevées qu'en vélocimétrie Doppler, puisqu'il faut plusieurs particules dans un volume de mesure. Si on prend les données de l'expérience du jet qui sera décrite au chapitre VI, pour l'analyse ponctuelle de vitesse, on rééclaire la photo prise à l'agrandissement 0.8 avec un faisceau de diamètre 0.6 mm. L'épaisseur de la tranche lumineuse étant de 0.2mm et supposant dix particules dans le volume de mesure ainsi défini, on aura une densité de particules

$$n = \frac{10}{\pi (0.3/0.8)^2 \times 0.2} \approx 110 \text{ mm}^{-3} = 1.1 \cdot 10^{11} \text{ m}^{-3}$$

Si on suppose que le diamètre de toutes les particules est de 3  $\mu\text{m}$  (ce qui

est pessimiste), on obtient une masse volumique apparente de

$$\rho_c = \rho_p \frac{4}{3} \pi R^3 n \approx 0.0016 \text{ kg/m}^3$$

avec  $R = 1.5 \text{ } \mu\text{m}$  et  $\rho_p \approx 10^3 \text{ kg/m}^3$ .

De la même manière, on peut démontrer que la viscosité apparente de la suspension est quasiment égale à celle du fluide [Réf.112; éq.22.7].

Enfin, cherchons la distance moyenne entre deux particules

$$\begin{aligned} \langle d \rangle &= n^{-3} \approx 0.21 \text{ mm} \\ &\approx 140 R \quad \text{avec } R = 1.5 \text{ } \mu\text{m}. \end{aligned}$$

De tous ces ordres de grandeur, on peut conclure que l'écoulement sera perturbé de manière négligeable par la présence des particules.

### 3.2 Interaction lumière-particule

#### 3.2.1 Propriétés de diffusion des particules

On peut trouver une description détaillée des méthodes de calcul de la diffusion de la lumière par une particule sphérique dans <sup>4,109,110</sup>.

Quand le diamètre de la particule est de l'ordre de grandeur ou plus grand que la longueur d'onde, la diffusion (dite de Mie) présente un caractère extrêmement sensible aux variations des paramètres (diamètre, longueur d'onde, indices de réfraction, angle d'observation), comme on pourra le constater sur les figures extraites de la réf.110 illustrant cette section.

Commençons par rappeler quelques définitions. Si un faisceau d'onde plane polarisé rectilignement de densité de puissance (intensité lumineuse)  $I_0$  rencontre une particule diffusante, l'intensité  $dI$  diffusée dans l'élément d'angle solide  $d\Omega$  situé dans la direction  $\Omega(\theta, \phi)$  (voir fig. III.12e) vaut :

$$dI = I_0 \sigma(\Omega) d\Omega$$

où  $\sigma(\Omega)$  est la section efficace angulaire (ou différentielle) de diffusion.

La puissance totale diffusée vaut:

$$\begin{aligned} I_{td} &= \int_{4\pi} dI(\Omega) &= I_0 \int_{4\pi} \sigma(\Omega) d\Omega \\ & &= I_0 \sigma \end{aligned}$$

Cette dernière expression définit la section efficace (totale) de diffusion.

Le rayonnement incident étant supposé rectilignement polarisé, la section efficace angulaire  $\sigma(\Omega)$  n'admet pas de symétrie cylindrique autour de la direction incidente. C'est pourquoi on s'intéresse souvent à la diffusion dans certaines directions particulières. Si on définit (voir la fig. III.12e) le plan de diffusion comme le plan contenant la direction du rayonnement incident (axe des z) et la direction d'observation, les grandeurs  $\sigma_1(\theta) = \sigma(\theta, \phi=90^\circ)$  et  $\sigma_2(\theta) = \sigma(\theta, \phi=0)$  sont les sections efficaces de diffusion pour les polarisations respectivement perpendiculaire et parallèle au plan de diffusion. Ces grandeurs sont particulièrement intéressantes parce qu'un rayonnement incident de polarisation quelconque peut toujours être décomposé en deux rayonnements de polarisation rectilignes et orthogonaux.

Ces définitions précisées, donnons quelques exemples de sections efficaces correspondant aux phénomènes de diffusion que nous allons rencontrer. La figure III.12a montre la section efficace totale en fonction du rayon réduit. On peut y voir que, pour de grands rayons, la section efficace tend vers deux fois la surface d'un disque circulaire de même rayon que la particule ( $2\pi R^2$ ). L'explication de ce phénomène est classique: la lumière interceptée par la sphère contribue à la section efficace pour une fois la surface du disque et la lumière diffractée sur les bords y contribue pour la même valeur. La figure III.12b montre la variation des sections  $\sigma_1(\theta)$  et  $\sigma_2(\theta)$  en fonction de l'angle  $\theta$ , pour une particule de latex dans l'eau (diamètre:  $1.1 \mu\text{m}$ ;  $\lambda_0: 5145 \text{ \AA}$ ). Cette figure nous illustre ce qui a été suggéré à la section III.2.2., c'est-à-dire le faible nombre de lobes de diffusion pour un diamètre de cet ordre de grandeur. La figure III.12c montre les très grandes variations des intensités lumineuses diffusées à  $90^\circ$  lorsque l'on fait varier le rayon des particules sphériques.

De tout ceci, on peut conclure qu'il est illusoire de vouloir tirer des conclusions à partir des ordres de grandeur des différents paramètres. En particulier, il est faux de penser qu'augmenter le diamètre des particules va automatiquement augmenter l'intensité diffusée à  $90^\circ$ . Dans ce domaine,

seule l'expérience peut nous permettre de savoir si les particules utilisées diffusent suffisamment de lumière.

Le seul paramètre dont il est avantageux de tenir compte est la polarisation. Quand les particules sont plus petites que la longueur d'onde ( $R > \lambda_0/10$ ), la diffusion (dite alors de Rayleigh) se présente de manière simple (Fig. III.12.d) et en particulier, l'intensité diffusée à  $90^\circ$  est nulle quand la polarisation du rayonnement incident est parallèle au plan de diffusion. Même si cette particularité s'estompe pour des particules plus grandes que la longueur d'onde (Figs. III.12 b et c), on essayera toujours d'orienter la polarisation incidente perpendiculairement au plan défini par la direction incidente et la direction d'observation.

### 3.2.2. Pression de radiation

Considérer le recul dû à la pression de radiation peut paraître assez bizarre à première vue. Cependant, il faut se rendre compte qu'il est possible de faire "léviter" dans un liquide une particule d'une dizaine de microns de diamètre au moyen d'un laser He-Ne de quelques mW.<sup>116-118</sup> Les énergies des impulsions lumineuses servant à éclairer les écoulements de nos expériences étant assez considérables, on a essayé de calculer de manière approchée la réponse mécanique d'une particule à cette illumination laser. Ce calcul est effectué à l'annexe IV dans les mêmes conditions que le calcul du mouvement d'une particule dans un écoulement instationnaire (Annexe III) : particule isolée dans un écoulement uniforme (et stationnaire cette fois-ci) et nombre de Reynolds (basé sur la vitesse relative de la particule et du fluide) plus petit que l'unité. Ces calculs montrent que cet effet est tout à fait négligeable non pas à cause des vitesses induites qui peuvent être relativement importantes, mais plutôt à cause des très faibles déplacements qu'une particule effectue sous l'effet de ces forces.

### 3.2.3 Diffusion multiple

Jusqu'ici, on n'a examiné que le comportement de particules isolées. Cependant, comme les densités de particules sont relativement élevées, rien n'assure à première vue que la tranche lumineuse va se comporter comme si elle se propageait dans le vide. Bien que la distance moyenne entre deux particules soit suffisamment grande (voir § III.3.1.) pour assurer que la diffusion d'un photon par une particule s'effectue bien comme si celle-ci est parfaitement isolée (diffusion "indépendante" <sup>109</sup>), un photon pourrait très bien subir plusieurs collisions avant d'arriver dans la zone d'intérêt à photographier. De la même manière, les photons diffusés à 90° par une particule risquent eux aussi de subir plusieurs collisions avant d'atteindre l'objectif photographique et l'image qu'il vont former peut être entièrement déformée.

On trouvera dans l'annexe V un exposé des techniques de calcul qui peuvent être employées pour quantifier ces effets, mais heureusement, pour le "dimensionnement" de l'expérience, il existe un critère simple permettant de déterminer si ces effets sont importants ou non. Les effets de diffusion seront négligeables si, sur le chemin parcouru par les photons incidents ou diffusés, la probabilité d'assister à une collision est faible. En d'autres termes, le chemin parcouru doit être appréciablement plus petit que le libre parcours moyen dans le "brouillard".

Le libre parcours moyen est donné par:

$$l = \frac{1}{\sigma n}$$

où  $n$  est la densité de particules et  $\sigma$  est la section efficace totale, moyennée sur toutes les particules de rayons différents.

Si  $n(R)$  est la densité de particules dont le rayon est compris entre  $R$  et  $R + dR$  et si  $\sigma(R)$  désigne la section efficace totale de diffusion pour une particule de rayon  $R$ , on a:

$$n = \int_0^{\infty} n(R) dR$$

$$\sigma = \frac{1}{n} \int_0^{\infty} \sigma(R) n(R) dR$$

Si on admet, à titre d'approximation, que  $\sigma(R) \approx 2\pi R^2$

$$n\sigma \approx 2\pi \int_0^\infty R^2 n(R) dR = 2\pi \langle R^2 \rangle$$

En prenant  $\sqrt{\langle R^2 \rangle} = 1 \mu\text{m}$  et  $n = 10^{11} \text{ m}^{-3}$ , on obtient  $l \approx 1.60 \text{ m}$ .

Un trajet de quelques centimètres dans un tel milieuensemencé ne pose donc pas de problème, mais il faudra se rappeler de l'existence du phénomène si de grands champs doivent être étudiés.

Notons encore qu'aux grandes densités de particules, une autre limitation se fera sentir bien avant l'effet de la multiple diffusion. Puisque les images des particules diffusantes sont des taches de diamètre non négligeable, la distance entre deux taches ne va plus être grande par rapport à leur dimension et on va observer interaction et déformation de ces taches. C'est là une limitation pratique qui ne peut être évitée qu'en diminuant la concentration des particules jusqu'à ce que leurs images soient bien définies.

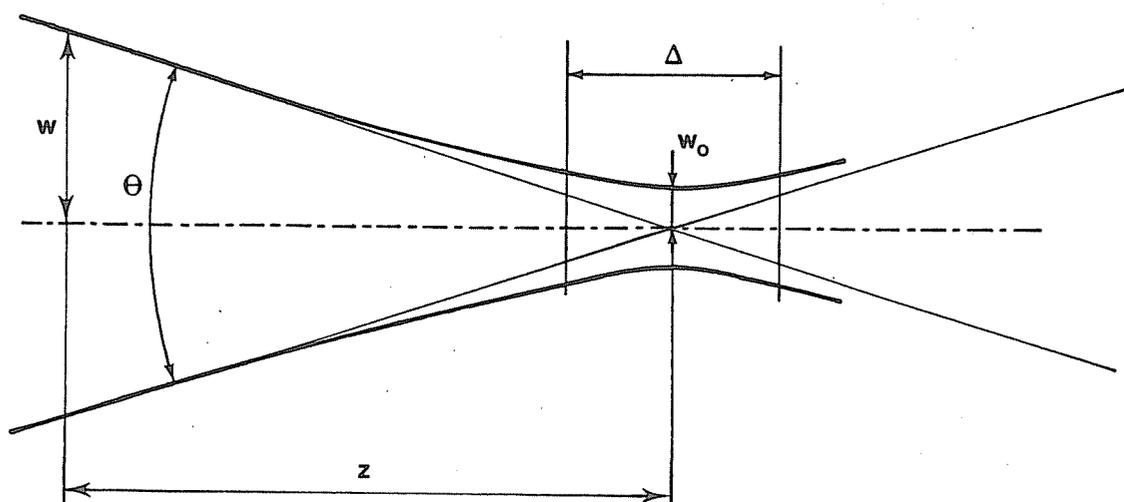


Fig.III.1.Faisceau laser gaussien. Définitions.

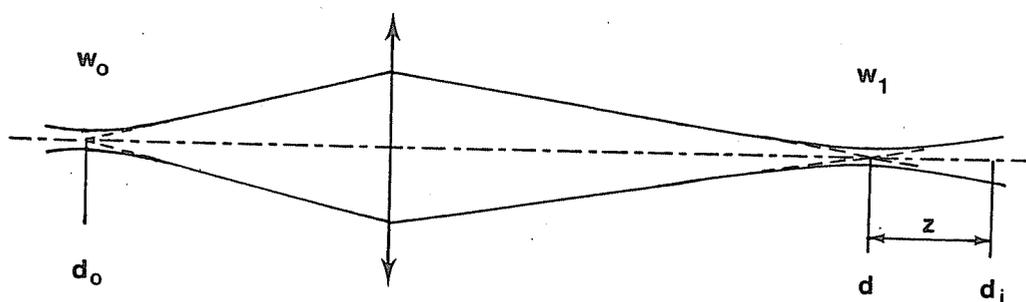


Fig.III.2. Propagation d'un faisceau gaussien. Le plan-image au sens géométrique du beam-waist objet se trouve à la distance  $d_i$  de la lentille.

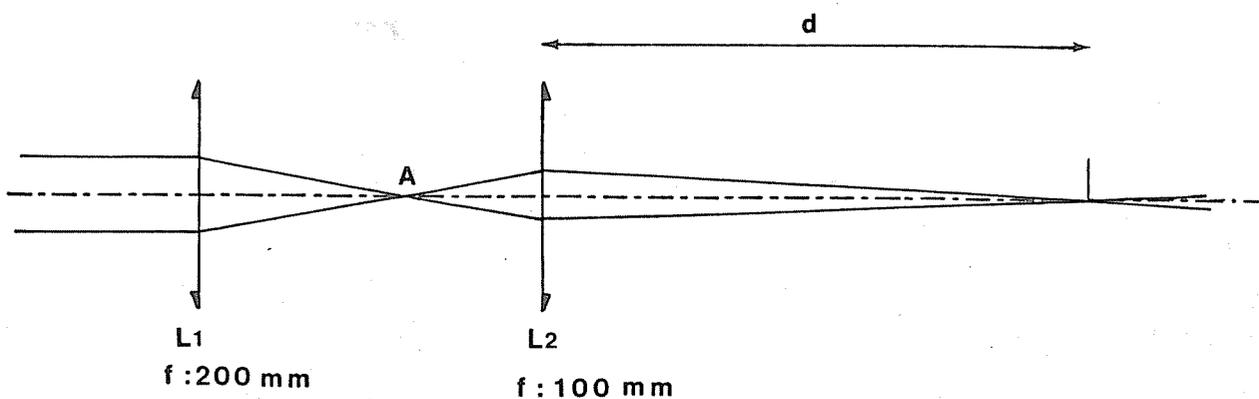


Fig.III.3.

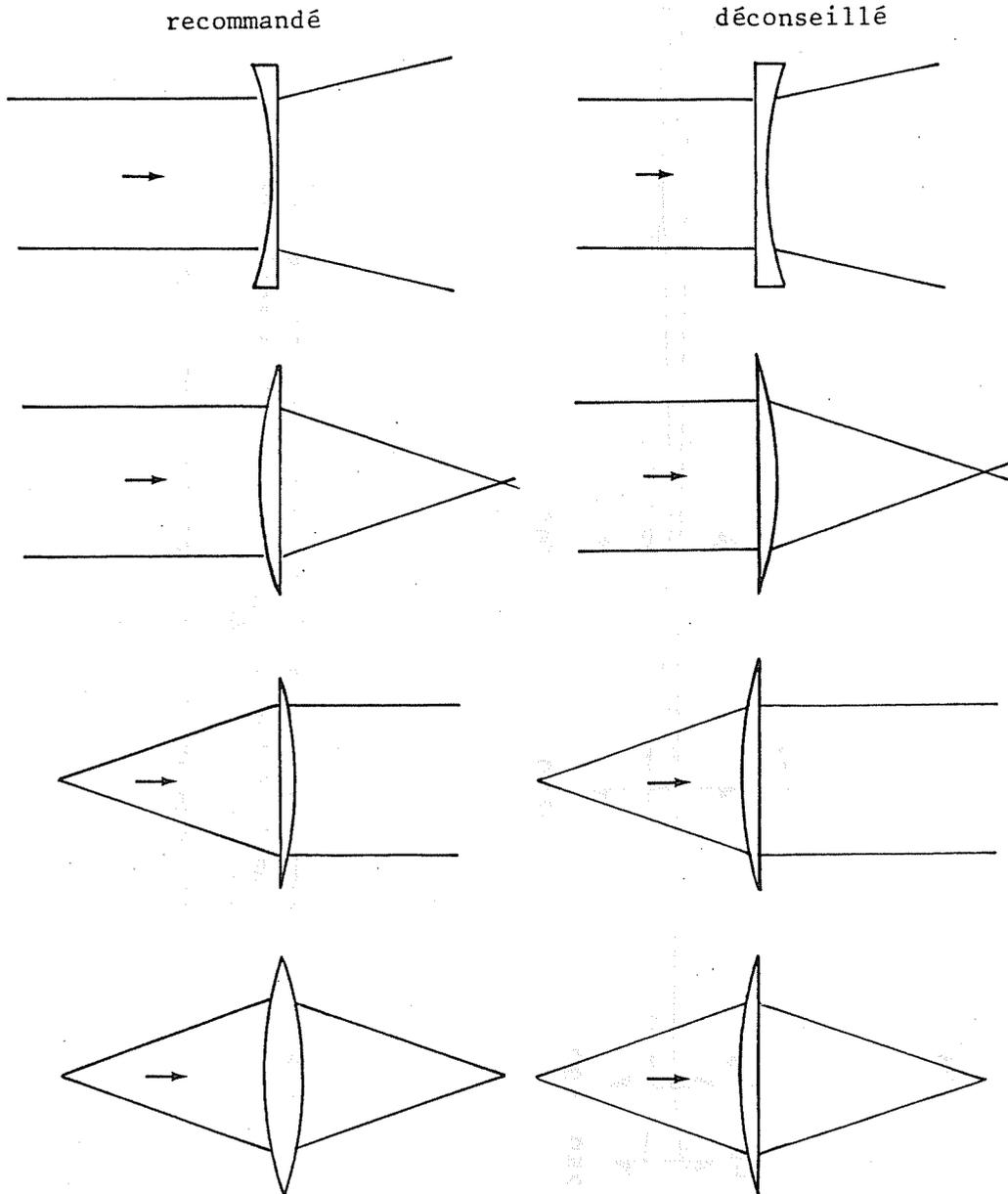
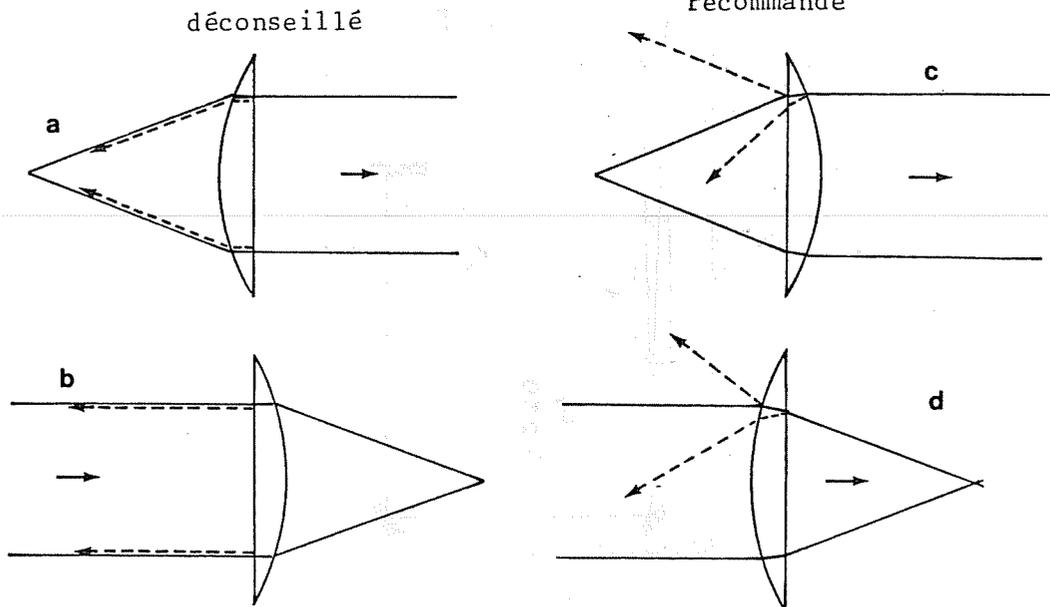


Fig.III.5 Reflets: orientation des lentilles



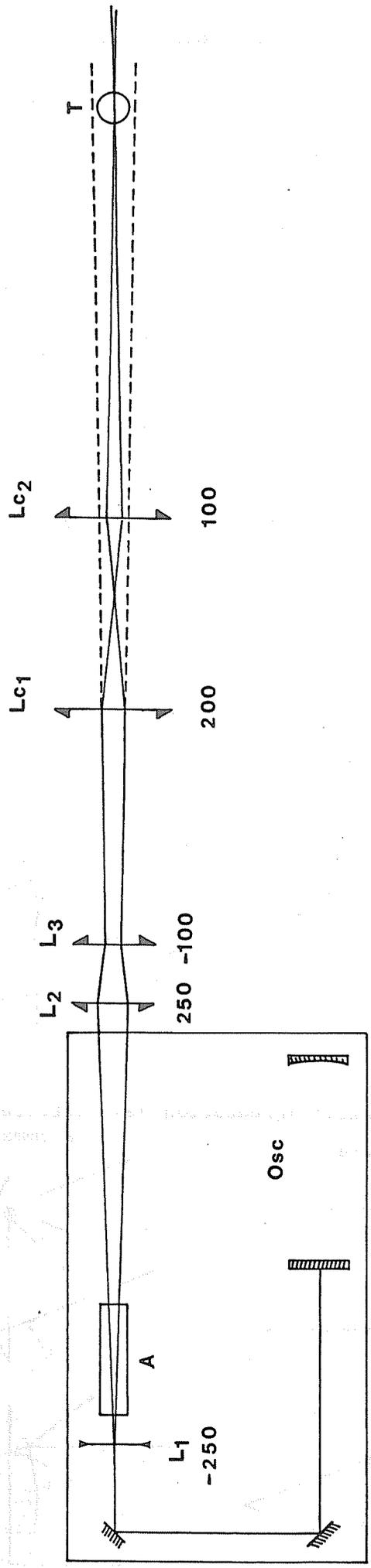


Fig.III.6. Exemple de montage (laser à rubis). Osc: Oscillateur laser; A: amplificateur;  $L_1, L_2, L_3$  : lentilles sphériques;  $L_{c1}, L_{c2}$  : lentilles cylindriques.

Les longueurs focales sont exprimées en mm.

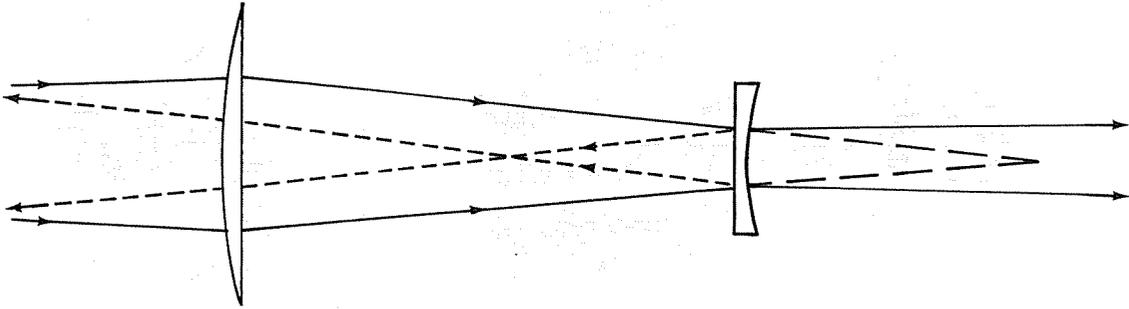


Fig. III.7. Reflets dans les lentilles  $L_2$  et  $L_3$  (Fig.III.6).

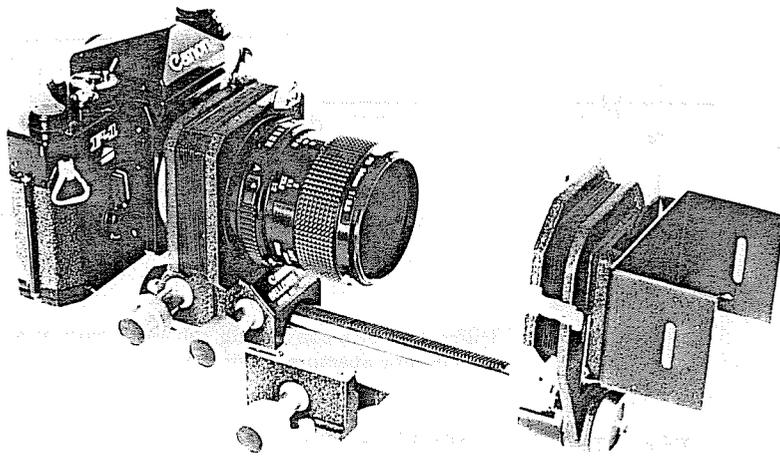


Fig.III.8. Montage d'alignement de l'appareil photographique. L'accessoire d'alignement est dévissé après réglage de l'orientation de l'appareil.

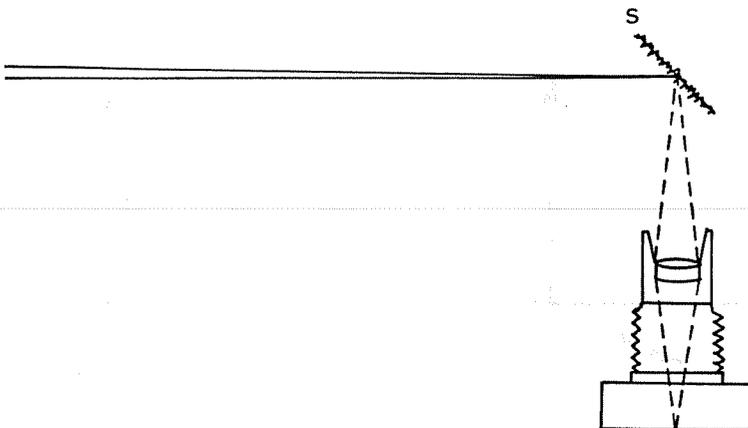


Fig.III.9. Montage de mise au point. S: surface rugueuse noircie.

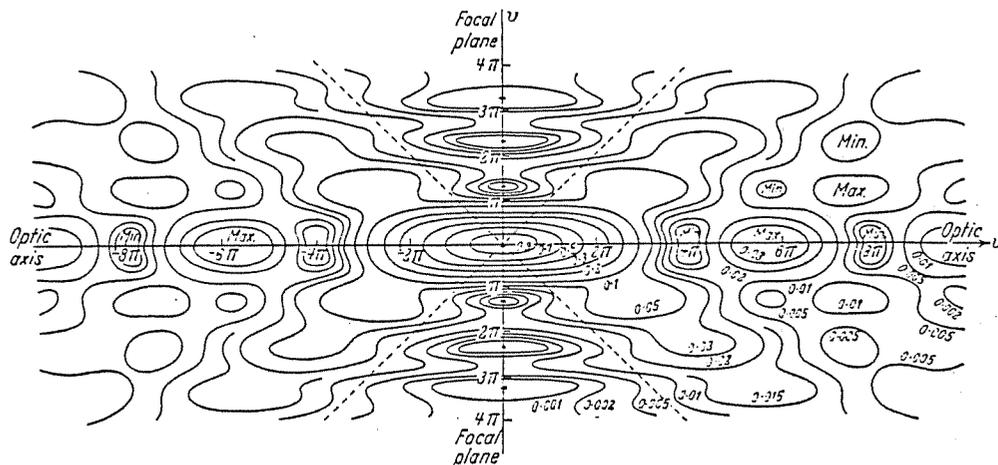


Fig. 8.41. Isophotes [contour lines of the intensity  $I(u, v)$ ] in a meridional plane near focus of a converging spherical wave diffracted at a circular aperture. The intensity is normalized to unity at focus. The dotted lines represent the boundary of the geometrical shadow. When the figure is rotated about the  $u$ -axis, the minima on the  $v$ -axis generate the ARX dark rings.

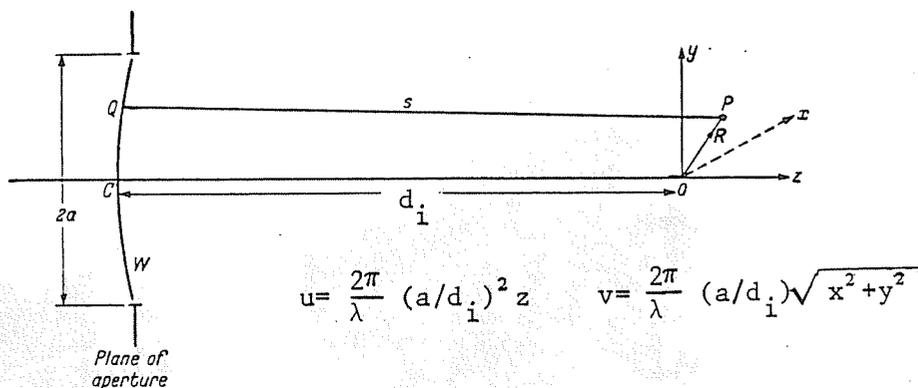


Fig. 8.40. Diffraction of a converging spherical wave at a circular aperture: Notation.

Fig.III.10. Référence 4

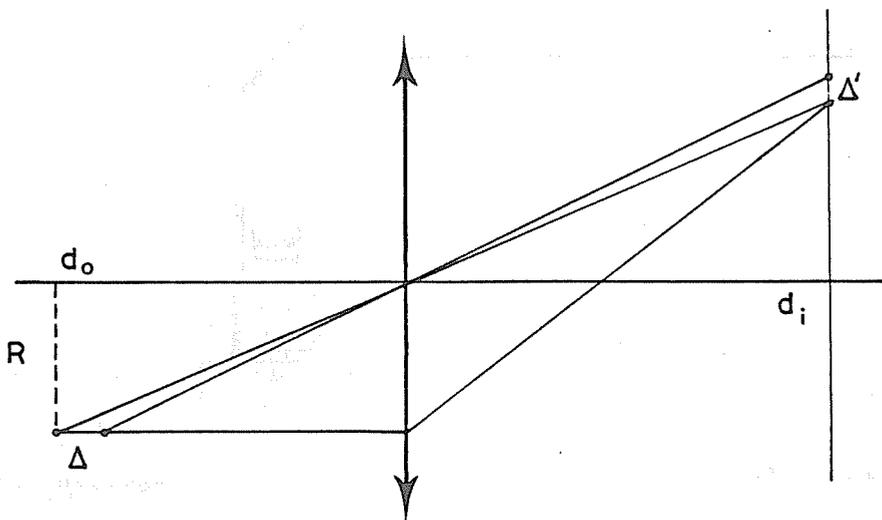


Fig.III. 11. Effets de perspective.

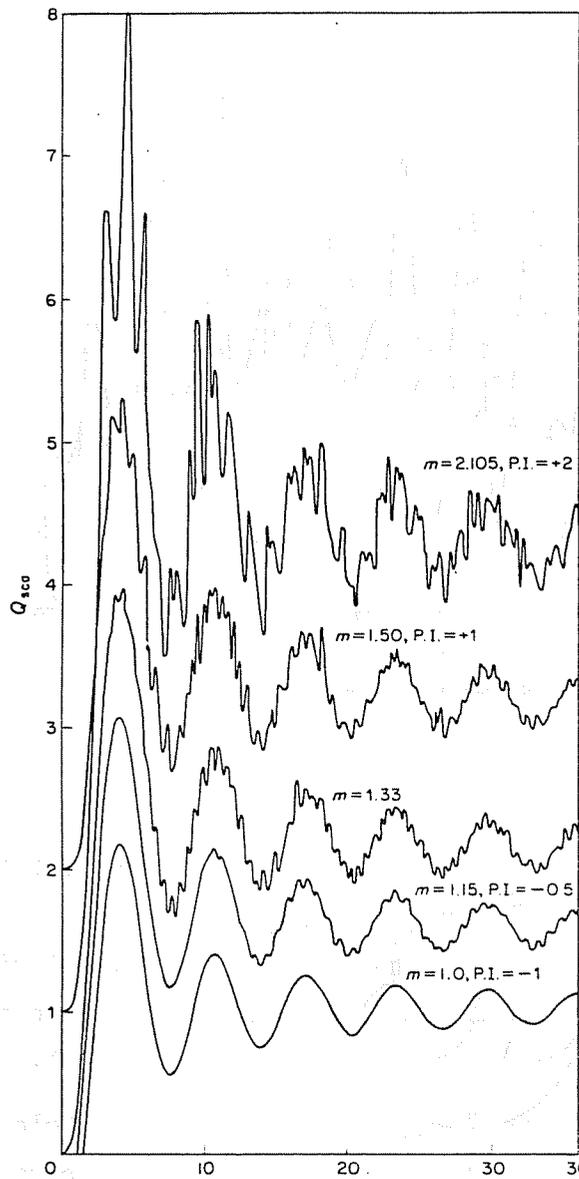


Fig.III.12a

Réf. 110

Propriétés de diffusion des particules sphériques

$$m = \frac{n_p}{n_f}$$

$n_p$  : indice de réfraction de la particule

$n_f$  : indice de réfraction du milieu

$$\alpha = \frac{2\pi n_f R}{\lambda_0} ; R = D/2$$

$$\rho = 2\alpha(m-1)$$

$$Q_{sca} = \sigma/\pi R^2$$

Section efficace réduite  $\sigma/\pi R^2$  en fonction de  $\rho = 2\alpha(m-1)$  pour différentes valeurs de  $m = n_p/n_f$ . Noter que les différentes courbes sont décalées verticalement d'une valeur désignée par P.I.

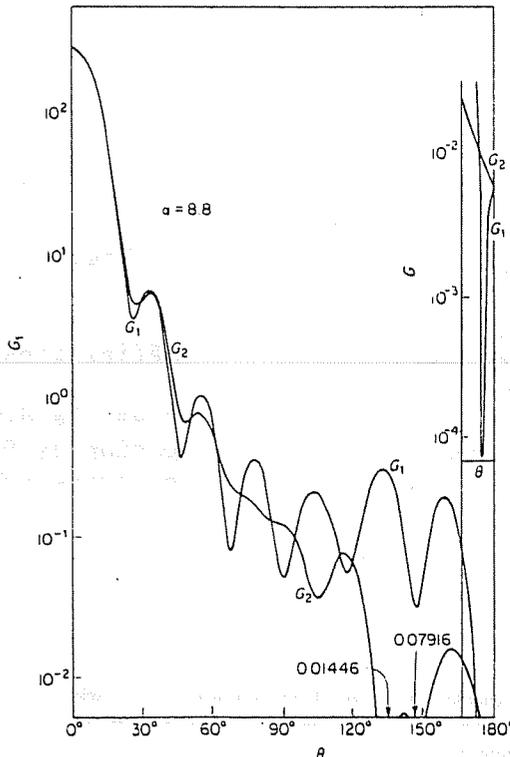


Fig.III.12b

Variation de la section efficace angulaire en fonction de l'angle de diffusion pour des polarisations perpendiculaire ( $G_1$ ) et parallèle ( $G_2$ ) au plan de diffusion

$G_1$  et  $G_2$  sont proportionnels à  $\sigma_1(\theta)/\alpha^2$  et  $\sigma_2(\theta)/\alpha^2$  (voir le §.III.3.2.1.)

Le plan de diffusion est le plan défini par la direction incidente et la direction d'observation.

FIG. 4.64. Angular gain  $G_1$  and  $G_2$  for  $\alpha = 8.8$  and for  $m = 1.20$  plotted against  $\theta$ .

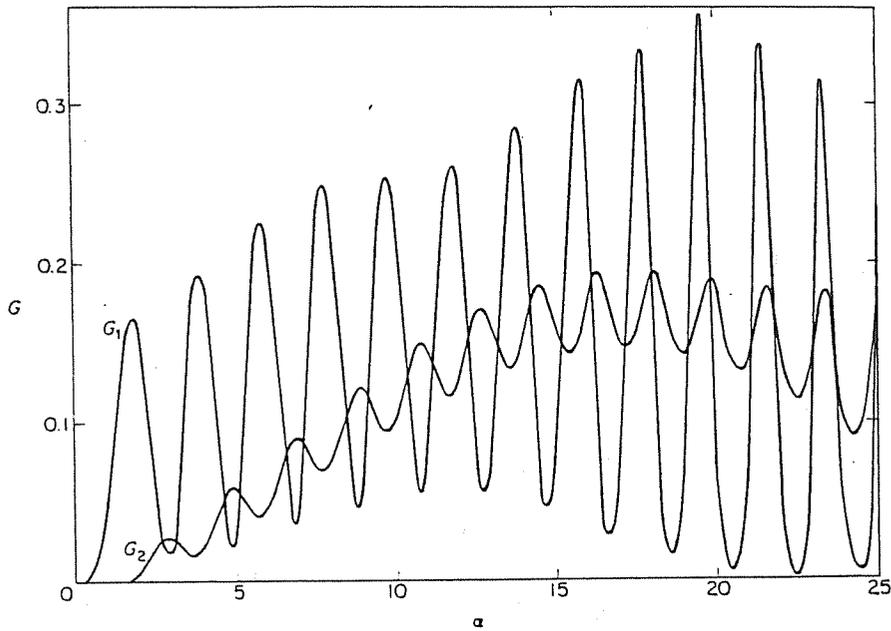


Fig.III.12c  
Variation de  $G_1$  et  $G_2$   
(voir fig.III.12b) en  
fonction du rayon  
réduit  $\alpha$ .

Angular gain at  $90^\circ$  for  $m = 1.20$ .

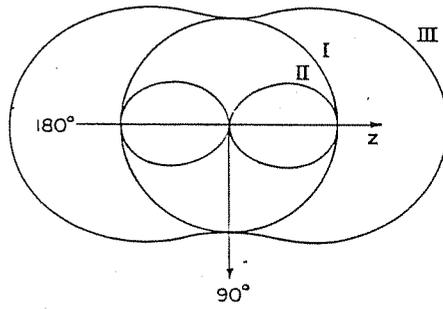


Fig.III.12d Diffusion Rayleigh

- I: Polarisation perpendiculaire au plan de diffusion (voir III.3.2.1.)
- II: Polarisation parallèle au plan de diffusion
- III: Non polarisé

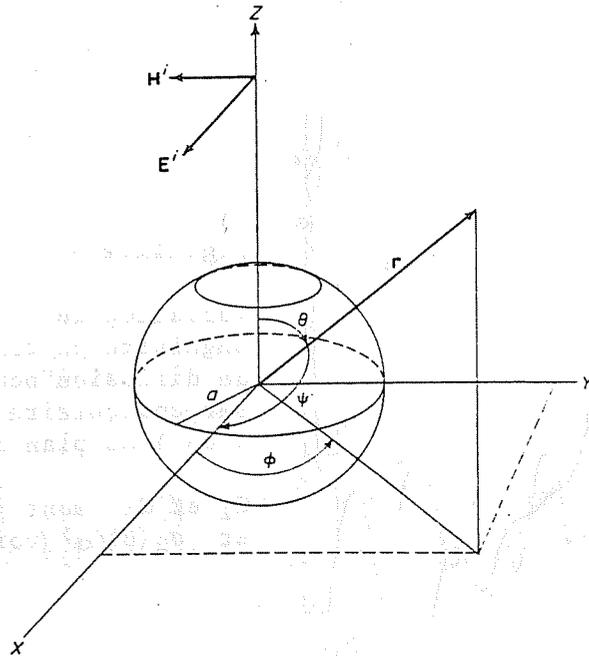


Fig.III.12.e

Définitions des variables

$z$  est la direction de propagation du faisceau incident polarisé suivant l'axe des  $x$ .

Geometry for Rayleigh scattering. Incident wave travels along positive  $z$ -axis with electric vector polarized along  $x$ -axis. Particle with radius  $a$  has its center at the origin. Direction of scattered wave is defined by polar angles  $\theta$  and  $\phi$ .

## CHAPITRE IV : TECHNIQUES D' ANALYSE DES CLICHES

### 1. ECLAIREMENT PONCTUEL - TRAITEMENT DES FRANGES DE YOUNG

#### 1.1 Description des franges

Imaginons que nous éclairons une photographie d' un écoulement ensemencé comme celle de la figure IV.1 sur une zone où la vitesse peut être considérée comme constante. La position des quelques particules indépendantes contenues dans cette surface est évidemment aléatoire et inconnue. La figure de diffraction aura, en plus des franges décrites au chapitre II, un caractère aléatoire, un speckle, que nous ne pourrions étudier en détail. Seule la statistique de ce speckle peut être connue et seules donc ses propriétés "moyennes" pourraient être déduites. Par "moyenne", on entend une moyenne d' ensemble prise sur un grand nombre de réalisations indépendantes des positions aléatoires des particules. Or justement, de par le faible nombre de particules dans la zone éclairée, la statistique du speckle est malaisée à décrire et n'est certainement pas gaussienne comme au chapitre II. Les calculs qui vont suivre ne pourront donc servir que d' approximations et de guide pour mettre au point les techniques de traitement, mais la valeur de ces techniques de traitement ne pourra être jugée que par la confrontation à l' expérience. Tout au long de l' exposé, on essaiera de souligner les points où les hypothèses faites peuvent poser problème.

On va supposer que le cliché est enregistré en double exposition (on examinera plus loin les modifications dues à plus de deux expositions) et que seule une translation d' ensemble différencie les deux images. Plusieurs effets peuvent empêcher une parfaite reproduction des images:

- 1) le film n' étant pas parfaitement linéaire, les particules doivent avoir une densité assez faible pour qu' une particule de la deuxième exposition ne vienne pas se superposer à une particule de la première.
- 2) l' énergie de la deuxième impulsion peut être différente de la première.
- 3) le profil du faisceau d' illumination étant gaussien, un mouvement "hors-plan" va faire varier l' intensité diffusée.

Ces effets, qui provoquent une diminution de contraste des franges, sont très difficiles à quantifier à cause de la non-linéarité de l' émulsion et de la saturation d' un certain nombre d' images de particules.

Admettons que l'on éclaire la photographie dont la transmittance est décrite par  $t(\vec{r}_0)$  au moyen d'un faisceau de profil  $P(\vec{r}_0)$  (généralement gaussien, voir le § IV.1.4.2). L'amplitude à la sortie de la pellicule vaudra

$$U(\vec{r}_0) = t(\vec{r}_0) \cdot P(\vec{r}_0)$$

Si les trois effets décrits plus haut sont négligeables, on a (voir chap.II):

$$t(\vec{r}_0) = C(\vec{r}_0) + C(\vec{r}_0 - \vec{d}) \quad \text{où } \vec{d} \text{ est le déplacement}$$

$$\text{et} \quad U(\vec{r}_0) = [C(\vec{r}_0) + C(\vec{r}_0 - \vec{d})] \cdot P(\vec{r}_0) \quad (1)$$

L'intensité dans le plan de la transformée de Fourier vaudra alors (fig.II.1)

$$I(\vec{r}_f) = \left| \left\{ (1 + \exp \frac{2\pi}{\lambda f} \vec{r}_f \cdot \vec{d}) \cdot \text{TF}_{\vec{r}_f} C(\vec{r}_0) \right\} * \text{TF}_{\vec{r}_f} P(\vec{r}_0) \right|^2 \quad (2)$$

où \* décrit la convolution à 2 dimensions.

On considérera dans un premier temps (voir IV.1.5) que le déplacement  $\vec{d}$  est petit devant le rayon de  $P(\vec{r}_0)$ . On peut alors poser  $P(\vec{r}_0) \approx P(\vec{r}_0 - \vec{d})$  dans (1) et

$$I(\vec{r}_f) \approx 2 \left( 1 + \cos \frac{2\pi}{\lambda f} \vec{r}_f \cdot \vec{d} \right) \cdot |\text{TFC} * \text{TFP}|^2 \quad (3)$$

La description du deuxième facteur de (3), connu sous le nom de "halo de diffraction", nécessite une certaine modélisation de  $C(\vec{r}_0)$ . Un modèle assez général peut être le suivant:

$$C(\vec{r}_0) = \sum_k f_k (\vec{r}_0 - \vec{r}_k) \quad (4)$$

où  $\vec{r}_k$  est la position de la k-ème particule et  $f_k(\vec{r})$  décrit la forme de son image. Ce sont les variations aléatoires de ces deux paramètres qui vont produire le speckle contenu dans les franges (Fig.IV.3, portion centrale).

Quelles sont les caractéristiques de ce speckle? On peut s'attendre à ce que ses propriétés statistiques s'écartent, quand le nombre de particules est faible, de celles décrites au chapitre II. On trouvera à l'annexe VI un exemple simple de calcul de speckle non gaussien dans le cas particulier où les images des particules sont identiques. Cette annexe permet de montrer que, excepté dans le proche voisinage de l'origine (quelques fois la dimension du profil de diffraction de  $P(\vec{r}_0)$ ), le contraste  $\sigma_I / \langle I \rangle$  (voir II.2.1) est plus grand que l'unité quand le nombre moyen de particules (N) contenues dans  $P(\vec{r}_0) = \exp -r_0^2/w^2$  est petit. D'autre part, les corrélations spatiales

s' étendent plus loin que la limite classique de chapitre II. L' auto-corrélation de l' intensité peut s' approximer par

$$\langle I(\vec{r}_{f_1}) I(\vec{r}_{f_2}) \rangle = \langle I(\vec{r}_{f_1}) \rangle \langle I(\vec{r}_{f_2}) \rangle \{ C + D \exp -(\vec{r}_{f_1} - \vec{r}_{f_2})/A^2 \} \quad (5)$$

avec  $A = \lambda f / \pi w_0$  où  $w_0$  est le rayon du faisceau gaussien d'éclairement

$$C > D$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} C = 1$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} D = 1$$

Ce dernier point montre que la taille moyenne du grain de speckle sera plus grande que si le speckle obéissait à la statistique gaussienne du chapitre II. En plus, en se rapprochant de l'origine, le contraste devient très faible et la taille du grain de speckle augmente. Cet effet est dû à la transmittance  $C(\vec{r}_0)$  réelle dont le champ diffracté est composé d'ondelettes arrivant toutes en phase en  $\vec{r}_f = 0$ . Cette région est heureusement sans importance, parce que masquée pour bloquer la partie non diffractée du faisceau.

## 1.2 Traitement des franges en mécanique du solide

Une photographie en double exposition cohérente d'une surface rugueuse comme décrite au point II 2.2.1 est essentiellement différente des photographies de particules. En effet, les grains du speckle, non élargis par les aberrations ou les effets de saturation (II 2.1) remplissent toute la photographie. Comme d'autre part, les déformations sont considérablement plus faibles que dans des écoulements fluides, la résolution d'analyse ne doit pas être très importante et on peut éclairer le cliché sur une zone relativement grande. Le nombre de grains illuminés sera grand et le speckle présent dans les franges de Young sera gaussien et ses grains seront de petite dimension (Annexe VI).

Dans ces conditions, l'intensité des franges se réduit pour  $r_f \gtrsim 2\lambda f / \pi w_0$  (voir l'annexe VI, figure A12)

$$I(\vec{r}_f) = 2 \left( 1 + \cos \frac{2\pi}{\lambda f} \vec{r}_f \cdot \vec{d} \right) \cdot \langle W(\vec{r}_f) \rangle \cdot I_S(\vec{r}_f) \quad (6)$$

où  $\langle W(\vec{r}_f) \rangle$  est la moyenne d'ensemble du spectre de puissance du speckle et

$I_S(\vec{r}_f)$  est un speckle gaussien spatialement stationnaire et d'intensité moyenne unitaire. Si l'image décrite par (6) est lissée avec un filtre de réponse impulsionnelle plus large que le grain de speckle mais plus petite que les variations de la cosinusoïde, on obtient:

$$I'(\vec{r}_f) = 2 \left( 1 + \cos \frac{2\pi}{\lambda f} \vec{r} \cdot \vec{d} \right) \langle W(\vec{r}_f) \rangle \quad (7)$$

Un certain nombre de systèmes ont été proposés récemment pour analyser ce genre de franges<sup>142-150</sup>. La philosophie de ces systèmes est la suivante: puisque l'information utile contenue dans (6) est essentiellement unidimensionnelle, on ne perd rien en se ramenant à un problème à une dimension en intégrant l'intensité (6) suivant une direction parallèle aux franges. Si on a  $\vec{d} = d\vec{I}_x$ , (6) se réécrit

$$I(x_f, y_f) = 2 \left( 1 + \cos \frac{2\pi}{\lambda f} x_f d \right) \langle W(x_f, y_f) \rangle I_S(x_f, y_f) \quad (8)$$

et en intégrant sur la direction  $y_f$  pour toutes les valeurs de  $x_f$ , on a

$$I_0(x_f) = 2 \left( 1 + \cos \frac{2\pi}{\lambda f} x_f d \right) \int_{-\infty}^{+\infty} \langle W(x_f, y_f) \rangle I_S(x_f, y_f) dy_f \quad (9)$$

En admettant que  $I_S(x_f, y_f)$  varie très vite par rapport à  $\langle W(x_f, y_f) \rangle$  (grains très fins et nombreux), on a

$$\begin{aligned} I_0(x_f) &\approx 2 \left( 1 + \cos \frac{2\pi}{\lambda f} x_f d \right) \int_{-\infty}^{+\infty} \langle W(x_f, y_f) \rangle dy_f \\ &\approx 2 \left( 1 + \cos \frac{2\pi}{\lambda f} x_f d \right) W_0(x_f) \\ &\approx 2 s(x_f) W_0(x_f) \end{aligned} \quad (10)$$

Une très grande attention a été portée au problème de la modulation du terme périodique par  $W_0(x_f)$ . Cet effet déplace les maxima de  $I_0(x_f)$  et peut produire des erreurs de plusieurs pourcent sur la position des franges, spécialement quand le nombre de franges est réduit<sup>148</sup>.

Les maxima de (10) sont donnés par

$$\frac{dI_0(x)}{dx} = W_0 \frac{ds}{dx} + s \frac{dW_0}{dx} = 0 \quad (11)$$

si  $x_c$  est un sommet de  $s(x_f)$ ,  $x_c = \frac{\lambda f}{d} n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ), on a, au voisinage de  $x_c$

$$\frac{ds}{dx} \approx \frac{d^2s}{dx^2} \Delta \quad \text{avec } \Delta = x - x_c$$

$$\text{et donc } \Delta \approx -s \cdot \frac{dW_0}{dx} / \left( \frac{d^2s}{dx^2} \cdot W_0 \right) \Big|_{x=x_c} \quad (12)$$

$$s(x_c) = 1 + \cos \frac{2\pi}{\lambda f} x_c d = 2$$

$$\frac{d^2s}{dx^2} \Big|_{x=x_c} = - \left( \frac{2\pi}{\lambda f} d \right)^2 \cos \frac{2\pi}{\lambda f} x_c d = - \left( \frac{2\pi}{\lambda f} d \right)^2$$

$$\text{et donc } \Delta \approx 2 \frac{(dW_0 / dx)}{W_0} \cdot \left( \frac{\lambda f}{2\pi d} \right)^2 \quad (13)$$

Notons que  $W_0$  étant monotone décroissant (voir figure IV.3),  $\Delta < 0$  et  $|\Delta|$  diminue quand  $d$  augmente (grandes densités de franges).

Remarquons aussi que les minima de  $I_0(x_f)$  ne sont pas influencés par  $W_0(x_f)$  si le contraste est unitaire (franges décrites par l'équation (8)).

On peut classer les techniques proposées d'analyse en deux catégories:

a) une approche analytique où on calcule théoriquement  $\langle W_0(\vec{r}_f) \rangle$  à partir de II(14). Cette approche est très critiquable parce qu'il faut supposer que l'enregistrement photographique est parfaitement linéaire 146,147,149,150.

b) une approche expérimentale où on effectue l'intégration unidimensionnelle par intégration numérique après acquisition bidimensionnelle<sup>145</sup> ou directement par des photodétecteurs appropriés<sup>142</sup> ou après concentration par une lentille cylindrique<sup>144</sup>. La détermination de la périodicité peut se faire par la mesure de la position des minima<sup>142</sup>. Notons que ce procédé nécessite un filtrage passe-bas préalable pour supprimer le bruit restant<sup>143</sup>.

Une autre technique consiste à mesurer les positions des maxima<sup>145</sup> ou des pics de Fourier<sup>146</sup> après détermination indépendante de  $W_0(x_f)$ . Dans ce dernier cas,  $W_0(x_f)$  se mesure en intégrant  $I(x_f, y_f)$  perpendiculairement aux franges. On introduit alors  $W_0(x_f)$  dans (10) de manière à obtenir  $s(x_f)$  qui est une fonction périodique d'amplitude constante (Fig. IV.2).

Notons que ces approches ne sont pas automatiques et nécessitent encore la détermination par un opérateur extérieur de la direction des franges. Deux algorithmes ont été proposés pour la mesure automatique de l'angle:

- Dans le cas de franges de très bonne qualité, avec un grain de speckle très fin, il n'est pas nécessaire d'intégrer la distribution d'intensité. L'intensité lumineuse le long d'une ligne quelconque montre, après filtrage passe-bas un profil périodique de bonne qualité dont on peut mesurer la période. Le même procédé appliqué à plusieurs directions indépendantes permet d'estimer l'angle et le pas des franges<sup>143</sup>.

- Plutôt que de se ramener à un problème unidimensionnel, on peut utiliser toute l'image et en calculer numériquement la transformée de Fourier. On obtient alors la fonction d'autocorrélation bidimensionnelle de la photographie de speckle (Fig. I.5). Si le nombre de grains du speckle est grand, on obtient deux pics de corrélation bien définis<sup>151</sup>.

### 1.3 Traitement des franges en mécanique des fluides

Comme souligné au IV 1.1, les grains du speckle multipliant les franges obtenues à partir de clichés d'écoulement sont en moyenne plus gros que si le speckle était gaussien. En plus, les déformations pouvant être très grandes, le rayon du faisceau d'éclairage doit être faible. Ces deux effets concourent à produire un faible nombre de gros grains de speckle (Fig. IV.3). Les

hypothèses du IV 1.2 utilisées en mécanique du solide ne sont donc plus satisfaites et le halo de diffraction doit plutôt retrouver sa signification première: il s'agit de la figure de diffraction (compliquée) due à un petit nombre de particules aléatoirement disposées. La difficulté d'invoquer des hypothèses statistiques va nous empêcher de caractériser théoriquement le halo de diffraction. Les techniques d'analyse qui vont être proposées seront donc ad-hoc et reposeront uniquement sur l'expérience que nous avons pu acquérir au cours du traitement de plusieurs milliers de franges de Young<sup>92-96</sup>.

### 1.3.1 Traitement par moyennage unidimensionnel de l'intensité

#### 1.3.1.1 Introduction

On a essayé d'appliquer les techniques proposées au II 1.2 pour traiter les franges obtenues en mécanique des fluides. Expérimentalement, deux faits sont à retenir:

- 1- Bien que l'intégration de l'intensité lumineuse parallèlement aux franges donne, dans la très grande majorité des cas des profils périodiques de bonne qualité, la mesure de l'enveloppe des franges par intégration perpendiculairement aux franges fournit toujours des courbes très bruitées (Fig.IV.3c et f).
- 2- Le contraste des franges peut ne pas être unitaire en cas de grands déplacements, de déplacements non uniformes ou de déplacements tridimensionnels.

Cette difficulté de mesure de l'enveloppe du halo de diffraction peut être attribuée à plusieurs effets:

- a) Le halo de diffraction n'est pas nécessairement à symétrie circulaire (aberrations dans l'image). Des intégrations le long de deux directions perpendiculaires ne donnent pas nécessairement la même enveloppe.
- b) L'enveloppe intégrée que l'on trouve est plutôt un reflet de la disposition aléatoire du faible nombre de particules présentes dans l'image.
- c) Le nombre de grains de speckle est de toute manière trop petit pour obtenir un très bon moyennage statistique.

Le traitement des franges en mécanique des fluides nécessite donc des techniques spécifiques qui vont être détaillées dans les sections suivantes.

### 1.3.1.2 Moyennage et transformée de Fourier directe

Numérisons l'intensité  $I(x_f, y_f)$  en l'échantillonnant suivant une trame carrée dont le pas ( $\Delta$ ) satisfait au théorème de Shannon. On obtient la matrice d'intensité  $I(m, n)$  par l'identité

$$I(m, n) = I(x_f = m\Delta, y_f = n\Delta) \quad 0 \leq m, n \leq N-1 \quad (14)$$

Si une rotation a amené les franges à être parallèles à l'axe  $n$ , on a :

$$I(m, n) = S(m) H(m, n) \quad (15)$$

où  $S(m)$  est le terme périodique de contraste éventuellement non-unitaire et  $H(m, n)$  le halo de diffraction résultant de la disposition aléatoire de particules dans l'image.

Une intégration le long de l'axe  $n$  donne :

$$\begin{aligned} I_0(m) &= S(m) \sum_{n=0}^{N-1} H(m, n) \\ &= S(m) H_0(m) \end{aligned} \quad (16)$$

où  $H_0(m)$  est une fonction dont la seule caractéristique connue est la décroissance vers zéro aux deux extrémités de l'intervalle.

A cause de la forme inconnue et non mesurable du halo de diffraction, la mesure de la périodicité par les positions des maxima de la courbe n'est pas fiable. La mesure des minima est plus correcte si le contraste est bon, mais nécessite de toute manière un filtrage passe-bas préalable. En plus, pour les faibles nombres de franges, la localisation précise des minima risque de devenir difficile.

Pour ces raisons, nous avons été amené à utiliser un traitement par analyse de Fourier. Notons que ce type de traitement est fondamentalement bien adapté au problème puisqu'il s'agit de rechercher la périodicité contenue dans (16).

Comme (16) est une fonction échantillonnée, nous utiliserons la transformée de Fourier discrète (DFT) <sup>152</sup> calculée grâce à l'algorithme de transformée de Fourier rapide (FFT). Pour cette raison, les transformées discrètes à une dimension seront notées

$$\begin{aligned} f(l) &= \text{FFT}_1 I_0(m) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} I_0(m) \exp -i2\pi ml/N \end{aligned} \quad (17a)$$

avec  $N = 2^M$  ( $M$  entier) pour l'application de l'algorithme FFT.

La transformée inverse vaudra:

$$I_0(m) = \text{FFT}_m^{-1} f(l) = \sum_{l=0}^{N-1} f(l) \exp i2\pi ml/N \quad (17b)$$

Rappelons que l'usage des transformées de Fourier discrètes implique implicitement que les séquences  $I_0(m)$  et  $f(l)$  sont périodiques (période:  $N$ ) ce qui s'exprime par:

$$\begin{aligned} I_0(m) &= I_0(m+kN) \\ f(l) &= f(l+kN) \end{aligned} \quad k = \dots -2, -1, 0, +1, +2, \dots \quad (17c)$$

L'avantage d'introduire le facteur  $1/N$  dans la transformée directe (17a) réside dans l'expression très simple des transformées de fonctions périodiques élémentaires. Par exemple, pour  $I_0(m) = \cos 2\pi m/L$  (avec  $N/L$  entier), on a :

$$\cos 2\pi m/L = \frac{1}{2} \exp +i2\pi m/L + \frac{1}{2} \exp -i2\pi m/L$$

et en vertu de (17b), on obtient immédiatement:

$$\text{FFT}_1 \cos 2\pi m/L = \begin{cases} 1/2 & l = \pm N/L \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Rappelons quelques propriétés usuelles des transformées de Fourier discrètes. Pour des séquences quelconques  $X(m)$  et  $Y(m)$ , on a les relations suivantes.

#### *Convolution*

$$X(m) * Y(m) = \sum_{n=0}^{N-1} X(n) Y(m-n)$$

et

$$\text{FFT}_1 (X(m) * Y(m)) = N (\text{FFT}_1 X(m)) . (\text{FFT}_1 Y(m))$$

#### *Corrélation*

$$X(m) \star Y(m) = \sum_{n=0}^{N-1} X(n) Y^*(n-m)$$

et

$$\text{FFT}_1 (X(m) \star Y(m)) = N (\text{FFT}_1 X(m)) . (\text{FFT}_1 Y(m))^*$$

Un cas particulier de la relation précédente concerne l'autocorrélation:

$$\text{FFT}_1 (X(m) \star X(m)) = N |\text{FFT}_1 X(m)|^2$$

#### *Parseval*

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |X(n)|^2 = \sum_{l=0}^{N-1} |\text{FFT}_1 X(m)|^2$$

Notons encore que les corrélations et convolutions définies plus haut sont des corrélations et convolutions "circulaires" de séquences périodiques (voir l'équation 17c). Si on désire calculer la convolution "classique" des séquences finies  $X(m)$  et  $Y(m)$ , c'est-à-dire

$$\sum_{n=0}^{N-1} X'(n) Y'(m-n)$$

avec

$$\begin{aligned} X'(m) &= X(m) & 0 \leq m \leq N-1 \\ &= 0 & \text{ailleurs} \end{aligned}$$

et la même relation pour  $Y'(m)$ , il est nécessaire d'augmenter la période des séquences et de la porter à  $2N$  en rajoutant  $N$  zéros en  $[N, 2N-1]$ . On effectue alors tous les calculs sur l'intervalle  $[0, 2N-1]$ ; en particulier, toutes les transformées de Fourier doivent être calculées en utilisant l'algorithme de l'équation 17a où on a remplacé  $N$  par  $2N$ .

Examinons l'effet de l'analyse de Fourier sur le signal  $I_0(m)$  résultant de l'intégration dans une direction de l'intensité des franges. On a:

$$\begin{aligned} f(l) &= \text{FFT}_l I_0(m) = \text{FFT}_l S(m) * \text{FFT}_l H_0(m) \\ &= b_1(l) * b_2(l) \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} b_1(n) b_2(l-n) \end{aligned} \quad (18)$$

avec  $b_1(l) = \text{FFT}_l S(m)$  et  $b_2(l) = \text{FFT}_l H_0(m)$

Nous supposons, pour la simplicité des calculs, que l'intervalle  $[0, N-1]$  est un multiple exact de la période de  $S(m)$ , qui peut s'écrire

$$S(m) = (1 + \cos 2\pi m/L) = 1 + \frac{1}{2} (e^{i2\pi m/L} + e^{-i2\pi m/L}) \quad (19)$$

avec  $N/L$  entier.

La transformée de Fourier de  $S(m)$  s'exprime par

$$\begin{aligned} b_1(l) &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} S(m) \exp(-i2\pi ml/N) \\ &= 1 \quad l=0 \\ &= 1/2 \quad l= N/L, -N/L \end{aligned}$$

et donc

$$f(l) = b_2(l) + \frac{1}{2} b_2(l-N/L) + \frac{1}{2} b_2(l+N/L) \quad (20)$$

L'opération de convolution "reproduit" donc la transformée de Fourier  $b_2(l)$  de la fonction  $H_0(m)$  autour de la fréquence  $l=N/L$ . La figure IV.4 illustre schématiquement cette notion dans deux cas: grand nombre de franges (grand déplacement) et faible nombre de franges (petit déplacement). Des exemples réels correspondant aux mêmes cas peuvent être trouvés à la figure IV.3. Notons que dans ces cas réels, l'intervalle  $[0, N-1]$  est étendu en adjoignant une série de valeurs nulles à la fin de l'intervalle. En calculant les FFT sur ce nouvel intervalle, on augmente le nombre d'échantillons dans l'espace de Fourier et donc la résolution.

On voit sur la schématisation de la figure IV.4 que pour une enveloppe  $H_0(m)$  variant lentement par rapport aux franges, le sommet du pic situé à  $l=N/L$  donne la fréquence des franges quelle que soit la forme de  $H_0(m)$ .

Notons que  $|b_2(l)|$  est symétrique puisque  $H_0(m)$  est réel. Par contre, pour un faible nombre de franges (voir les figures IV.4 et IV.3 d,e,f), on observe une interaction et une déformation des pics. On en déduit une sorte de critère de décision: si le pic de  $|f(l)| = |\text{FFT}_l I_0(m)|$  est bien isolé, alors la position de son sommet donnera une bonne estimation de la fréquence des franges, quelle soit la forme du halo de diffraction  $H(m,n)$ .

On a supposé à l'équation (19) que le contraste des franges est parfaitement unitaire. Il est important de remarquer que, si ce n'est pas le cas, on va simplement assister à une diminution de la hauteur du pic situé à  $l=N/L$  par rapport au pic de l'origine. Le critère de décision cité plus haut reste alors valable et une bonne isolation du pic utile permet d'obtenir une estimation non biaisée de la fréquence des franges, même si celles-ci n'ont pas un contraste unitaire.

Expérimentalement, on trouve que cette procédure fonctionne très bien et que les pics sont bien isolés quand on a cinq franges ou plus (la frange centrale plus les ordres +1, -1, +2, -2). Par contre, l'interaction des pics peut être importante pour le nombre minimum de franges: trois. On va examiner à la section suivante une amélioration de la technique permettant d'obtenir une estimation même dans ce cas.

### 1.3.1.3. Amélioration de la résolution - Apport de l' exposition multiple

L' interaction des pics rencontrée lors de la transformation de Fourier de  $I_0(m)$  ( voir la section précédente ) ne peut être réduite qu' en diminuant la largeur de la transformée de Fourier (  $b_2(l)$  ) de l' enveloppe des franges (  $H_0(m)$  ). On peut se représenter le signal  $I_0(m)$  comme une cosinusoïde  $S(m)$  infinie multipliée par une "fenêtre"  $H_0(m)$  dont le support est l' intervalle  $[0, N-1]$ . Modifier  $b_2(l)$  revient à remplacer  $H_0(m)$  par d' autres enveloppes de même support et de comportement bien connu et contrôlé. En particulier, la fenêtre minimisant la largeur de raie est la fenêtre "rectangulaire" qui est constante à l' intérieur de  $[0, N-1]$  et nulle au-dehors.<sup>152</sup> Remplacer  $H_0(m)$  par la fenêtre rectangulaire revient à extraire directement  $S(m)$  de l' éq.(16) en divisant  $I_0(m)$  par  $H_0(m)$ , comme décrit à la section IV.2. Néanmoins cette opération est impossible parce que l' enveloppe  $H_0(m)$  n' est pas mesurable directement dans notre cas (voir 1.3.1.1) et ne peut être déduite par une opération de filtrage passe-bas puisque le spectre de fréquence de  $I_0(m)$  se présente comme illustré à la figure IV.4, dans le cas d' un faible nombre de franges. On a alors pensé à utiliser le fait que  $I_0(m)$  est le produit de deux fonctions. En prenant le logarithme de (16), on obtient:

$$I_1(m) = \log I_0(m) = \log S(m) + \log H_0(m) \quad (21)$$

et dans l' espace de Fourier:

$$f_1(l) = \text{FFT}_1 I_1(m) = \text{FFT}_1 \log S(m) + \text{FFT}_1 \log H_0(m) \quad (22)$$

Cette technique, très proche des techniques dites de "cepstrum" utilisées en acoustique<sup>152</sup>, permet de transformer le produit en addition d' un terme à amplitude constante ( $\log S(m)$ ) et d' une fonction variant lentement ( $\log H_0(m)$ ); la fig. IV.2 illustre ce résultat. Comme  $\text{FFT}_1 \log H_0(m)$  est une fonction localisée près de l' origine et que  $\text{FFT}_1 \log S(m)$  présente un pic de largeur minimum puisque  $S(m)$  est à amplitude constante, la résolution des pics dans l' espace de Fourier s' en trouve améliorée.

Notons quelques points importants:

- 1) Cette technique n' est applicable que lorsque le contraste des franges est uniforme. Dans ce cas, on a

$$S(m) = \left( 1 + C \cdot \cos \frac{2\pi m}{L} \right) \quad \text{avec } C \leq 1$$

Si le contraste est unitaire ( $C=1$ ), il est nécessaire d' éviter la singularité du logarithme lorsque  $S(m)=0$ . Pour ce faire, on introduit un léger décalage en calculant

$$I_1(m) = \log [A + I_0(m) ]$$

avec  $A$  petit (typiquement  $10^{-3}$  fois la valeur maximum de  $I_0(m)$  ).

- 2) La valeur de  $I_1(m)$  n' est plus nécessairement nulle aux extrémités de l' intervalle  $[0, N-1]$  . Cet effet pose des problèmes de raccordement et provoque des oscillations parasites dans  $f_1(l)$ . Une autre source d' oscillations réside dans le principe même de la fenêtre rectangulaire: la transformée de Fourier de la fonction rectangulaire présente des lobes extérieurs très importants, si bien que l' on maximise les oscillations en minimisant la largeur de raie.<sup>152</sup>
- 3) Le rapport signal sur bruit de  $I_1(m)$  est diminué . En particulier, des pics localisés négatifs peuvent apparaître dans les régions où  $I_0(m) \approx 0$ . On peut éventuellement remédier à ce défaut en supprimant ces pics par un traitement localisé. Par exemple, si on a

$$I_1(m+1) - I_1(m) > \epsilon$$

et

$$I_1(m-1) - I_1(m) > \epsilon$$

où  $\epsilon$  est une valeur imposée, on remplace  $I_1(m)$  par

$$I'_1(m) = [I_1(m+1) - I_1(m-1)]/2$$

La diminution du rapport signal sur bruit, surtout vers les extrémités de l' intervalle, ne garantit pas un fonctionnement optimal de la méthode lorsque le rapport signal sur bruit de  $I_0(m)$  n' est pas très bon, comme cela peut se produire en double exposition. La figure IV.3 illustre cette constatation, on y voit que  $|FFT_1 I_1(m)|$  présente un bruit important.

Par contre, lorsque le rapport signal sur bruit de  $I_0(m)$  est bon, la technique permet de mesurer la périodicité de franges difficiles à discerner (Fig.IV.5). Les exemples de la fig.IV.5 proviennent de photographies prises en exposition multiple dans un écoulement bidimensionnel à très basse vitesse (voir V.3). Dans ce cas, l' affinement des franges produit par les interférences multiples augmente leur rapport signal sur bruit. L' amélioration des franges peut être très spectaculaire (Fig.IV.5). Notons au sujet de cette figure que les franges ont été numérisées grâce à un système d' acquisition à balayage

mécanique (décrit au IV.1.4.1) qui n'assurait pas une bonne uniformité de la sensibilité. C'est pourquoi les courbes de la fig. IV.5 ne sont pas tout-à-fait symétriques. Notons aussi que l'obstacle servant à bloquer la partie non diffractée du faisceau d'éclairément était sans doute un peu surdimensionné.

Signalons enfin que le nombre réel d'images successives éclairées par le faisceau dépend bien sûr du déplacement. L'amélioration ne se fera que pour les faibles déplacements et donc les faibles nombres de franges, ce qui est précisément le cas où une telle amélioration est souhaitable.

#### 1.3.1.4 Amélioration du rapport signal sur bruit

On a vu que l'effet d'une fenêtre rectangulaire est de minimiser la largeur de raie mais aussi de diminuer le rapport signal/bruit. Si on est plutôt intéressé à augmenter ce dernier sans améliorer nécessairement la résolution, on peut multiplier  $I_1(m)$  par une fonction "fenêtre" dont la transformée de Fourier présente des lobes extérieurs très peu importants et qui "lissera" le spectre de Fourier.

On a

$$I_2(m) = F(m) \cdot I_1(m) = F(m) \cdot \log I_0(m) \quad (24)$$

et donc

$$\begin{aligned} f_2(l) &= \text{FFT}_l I_2(m) \\ &= \text{FFT}_l I_1(m) * \text{FFT}_l F(m) \end{aligned}$$

Les figures IV.3b et IV.3e illustrent ce principe pour une fenêtre dite de Hanning<sup>152</sup>:

$$F(m) = \sin^2 \frac{\pi m}{N-1} \quad (25)$$

### 1.3.1.5 Résumé, comparaison des méthodes et possibilités d'automatisation

Il faut distinguer deux cas très différents suivant que l'on ait plus ou moins de cinq franges dans le champ. Dans le premier cas, la technique décrite par (17) (section IV.1.3.1.2) donne souvent de très bons résultats, en ce sens que  $f(1) = |\text{FFT } I_0(m)|$  présentera un pic symétrique et bien isolé à la fréquence des franges. Dans les cas où ce pic se détache mal du bruit de fond et si le contraste est proche de l'unité, l'utilisation d'une fenêtre de Hanning (25) permet d'améliorer le spectre.

Dans le second cas et plus particulièrement quand on n'a que trois franges (nombre minimum), une mesure précise ne peut se faire qu'avec un algorithme comme celui de l'équation (21) (section IV.1.3.1.3). Néanmoins un procédé de ce type ne permet pas de faire des miracles et n'est pas fiable à 100%. Son efficacité est cependant bonne pour l'analyse de clichés pris en exposition multiple.

Le grand avantage de la technique de moyennage unidimensionnel de l'intensité réside dans sa simplicité. En plus, la technique de transformée de Fourier directe (équation 17) permet de traiter des franges de mauvais contraste. En revanche, la nécessité d'une détermination préalable de l'orientation des franges par un opérateur extérieur est son principal défaut. Cet aspect interactif empêche l'automatisation totale de la méthode.

Quelques essais ont été réalisés pour imaginer un algorithme de mesure préalable de l'angle. On peut penser effectuer le moyennage dans un grand nombre de directions (180 directions, degré par degré, par exemple) et essayer de trouver un "critère de qualité" qui serait maximum lorsque la direction d'intégration est parallèle aux franges. On peut trouver aisément quelques exemples de tels critères. Imaginons que, pour une orientation donnée des franges, l'intensité intégrée

$$I_0(m) = \sum_n I(m,n)$$

soit normalisée de manière à ce que  $\sum_m (I_0(m)) = 1$ . Si on connaît l'enveloppe  $H_0(m)$  (avec la même normalisation :  $\sum_m (H_0(m)) = 1$ ), on conçoit aisément que l'expression

$$C_1 = \sum_m [I_0(m) - H_0(m)]^2 \quad (26)$$

sera maximum lorsque la direction définie par l'indice  $n$  sera parallèle

aux franges. L' expression (26) permet de calculer l' importance des fluctuations de  $I_0(m)$ , d' estimer le "contraste" de ce signal qui sera optimal lorsque l' intégration initiale se fait dans la direction des franges. Malheureusement, cette approche est impraticable dans notre cas puisque  $H_0(m)$  est inconnu et n' est sans doute pas le même dans toutes les directions. C' est pourquoi on doit se contenter de travailler avec une estimation grossière  $E(m)$  de l' enveloppe des franges et chercher l' extrémum de

$$C_2 = \sum_m [ I_0(m) - E(m) ]^2 \quad (27)$$

avec  $E(m) = [ \sin^2 \frac{\pi m}{N-1} / \sum_k \sin^2 \frac{\pi k}{N-1} ]$ , par exemple.

On peut même aller plus loin et se passer de l' enveloppe des franges, ainsi qu' il a été proposé dans la littérature<sup>145</sup>. Dans ce cas, on estime les fluctuations en calculant

$$C_3 = \sum_m [ I_0(m) ]^2 \quad (27a)$$

Une démarche tout à fait différente consiste à profiter du fait que la frange d' ordre zéro passe toujours par le point central, quelques soient l' interfrange et l' orientation des franges. Ainsi, l' expression

$$C_4 = \frac{\sum_{m=N/2-K}^{N/2+K} I_0(m)}{\sum_{m=N/2-K}^{N/2+K} I_0(m)}, \quad (28)$$

avec  $K \ll N$ , doit être maximum quand la direction de l' axe  $-m$  est perpendiculaire aux franges.

Les trois estimateurs  $C_2$ ,  $C_3$  et  $C_4$  ont été essayés sur un grand nombre d' images et on a pu constater qu' aucun des trois n' avait une fiabilité totale surtout pour de petits nombres de franges. Même si l' utilisation combinées de ces trois critères permet d' améliorer la précision sur l' estimation de l' orientation des franges, certaines franges dont le halo de diffraction est fort distordu ou dont le contraste est trop faible restent rebelles à ce genre de traitement.

Il est certain que si on veut automatiser la méthode avec des critères aussi simples que (27), (27a) ou (28), il sera nécessaire de rejeter un certain nombre de points de mesure où l' estimation de l' angle est jugée trop peu fiable. En effet, si l' angle utilisé est faux, le spectre de puissance de  $I_0(m)$  ne comportera aucun pic défini, ce qui peut être détecté par l' ordinateur de traitement. On obtiendrait ainsi des champs de vitesse avec des points inconnus que l' on pourrait analyser interactivement a posteriori.

### 1.3.2 Traitement par autocorrélation

#### 1.3.2.1 Description

La technique de moyennage direct impose une rotation (mécanique ou informatique) jusqu'à ce que les franges soient alignées avec une direction privilégiée (l'axe  $n$  dans le formalisme du 1.3.1). Si on décompose l'image des franges en lignes et en colonnes, chaque ligne peut être décrite comme un phénomène périodique (bruité) dont la phase varie. Faire tourner les franges revient à annuler cette phase. Pour éviter cette rotation, il suffit donc d'effectuer un moyennage sur une quantité indépendante de la phase. Le spectre de puissance de chaque ligne ou sa transformée de Fourier satisfont à cette condition. Soit

$$I(m,n) = S(m,n) H(m,n) \quad (29)$$

avec  $S(m,n)$  périodique dans une direction inconnue et de contraste éventuellement non unitaire

Etendons  $I(m,n)$  sur l'intervalle  $[0, 2N-1]$  en définissant

$$I(m,n) = 0 \quad N \leq m \leq 2N-1 \quad (30)$$

L'autocorrélation normalisée d'une ligne sera donnée par

$$R(u,n) = \frac{\sum_{m=0}^{N-1} I(m,n) I(m+u, n)}{\sum_{m=0}^{N-1} |I(m,n)|^2} \quad (31)$$

$$0 \leq u \leq N-1$$

L'autocorrélation est symétrique, ce qui, sur l'intervalle  $[0, 2N-1]$  s'exprime par

$$R(u,n) = R(2N-u,n)$$

et en calculant les FFT sur l'intervalle  $[0, 2N-1]$

$$\begin{aligned} \text{FFT}_1 R(u,n) &= \frac{1}{2N} \sum_{u=0}^{2N-1} R(u,n) \exp -i2\pi lu/2N \\ &= 2N \cdot \frac{|\text{FFT}_1 I(m,n)|^2}{\sum_m |I(m,n)|^2} \end{aligned} \quad (32)$$

La relation de Parseval donne

$$\sum_{m=0}^{N-1} |I(m,n)|^2 = \sum_{m=0}^{2N-1} |I(m,n)|^2 = 2N \sum_{l=0}^{2N-1} |\text{FFT}_1 I(m,n)|^2 \quad (33)$$

et donc

$$\text{FFT}_1 R(u,n) = \frac{|\text{FFT}_1 I(m,n)|^2}{\sum_{k=0}^{2N-1} |\text{FFT}_k I(m,n)|^2} \quad (34)$$

L'autocorrélation moyenne vaut alors

$$\begin{aligned} R(u) &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} R(u,n) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left\{ \frac{\sum_{m=0}^{N-1} I(m,n) I(m+u,n)}{\sum_{m=0}^{N-1} |I(m,n)|^2} \right\} \end{aligned} \quad (35)$$

$$= \text{FFT}_U^{-1} \cdot \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left\{ \frac{|\text{FFT}_1 I(m,n)|^2}{\sum_{i=0}^{2N-1} |\text{FFT}_i I(m,n)|^2} \right\} \quad (36)$$

$$= \text{FFT}_U^{-1} g(l)$$

L'autocorrélation moyenne peut donc se calculer de deux manières: soit directement (35) ou par l'intermédiaire du spectre de puissance de chaque ligne. Cette dernière option a l'avantage d'être plus économe en temps de calcul. L'équation (36) permet aussi de mieux discerner la signification physique de cette technique de traitement. La première méthode (moyennage des lignes et transformée de Fourier du résultat) revient à calculer la moyenne des transformées de Fourier de chaque ligne. Ici, c'est le spectre de puissance (carré module de la transformée de Fourier) qui est moyenné. On obtient, après moyennage, un spectre moyen avec un pic à la fréquence des franges projetée sur l'axe défini par la variable  $m$ . Notons en plus une différence fondamentale apparente dans (32) et (36): chaque autocorrélation est normalisée. En effet, l'absence de normalisation accorderait une valeur trop importante aux quelques lignes proches du centre où l'intensité lumineuse est grande. La normalisation permet de corriger cet effet tout en risquant d'introduire des autocorrélations fortement bruitées de lignes où aucun signal utile n'est présent. Ce dernier effet peut être facilement corrigé en n'effectuant la moyenne que sur les lignes où l'intensité moyenne est plus grande qu'une limite prédéterminée.

Examinons (31) en tenant compte de (29) et en considérant que le halo de diffraction puisse s'écrire sous la forme

$$H(m,n) = A(m,n) B(m,n) \quad (37)$$

où  $A(m,n) = \langle H(m,n) \rangle$ , moyenne d'ensemble sur différentes réalisations du speckle

et  $B(m,n)$  représente un speckle non gaussien d'intensité moyenne unitaire (voir annexe VI). Ce speckle peut être considéré comme approximativement stationnaire sauf à proximité immédiate de l'origine (annexe VI).

Dans ces conditions, on a:

$$R(u,n) = \frac{\sum_{m=0}^{N-1} B(m,n) B(m+u,n) A(m,n) A(m+u,n) S(m,n) S(m+u,n)}{\sum_{m=0}^N |I(m,n)|^2} \quad (38)$$

Remplaçons  $B(m,n) B(m+u,n)$  par sa moyenne d'ensemble à laquelle on ajoute une partie fluctuante de moyenne nulle.

$$B(m+u,n) B(m,n) = \langle R_B(u) \rangle + R'(m,m+u,n)$$

L'annexe VI permet de montrer que la moyenne peut se mettre sous la forme approximative:

$$\langle R_B(u) \rangle = C + D \exp - \frac{u^2}{p^2} \quad (39)$$

avec  $C \gtrsim D \cong 1$  pour un grand nombre de particules dans le volume de mesure

Donc

$$R(u) = \frac{1}{N} \sum_n R(u,n) = \langle R_B(u) \rangle \sum_n \left\{ \sum_m \left[ \frac{A(m,n) A(m+u,n)}{\sum_k I(k,n)^2} \right] S(m,n) S(m+u,n) \right\} \frac{1}{N}$$

$$+ \sum_n \left\{ \sum_m R'(m,m+u,n) \left[ \frac{A(m,n) A(m+u,n)}{\sum_k I(k,n)^2} \right] S(m,n) S(m+u,n) \right\} \frac{1}{N}$$

(40)

La tentation est grande de considérer que le deuxième terme de (40) est petit devant le premier. En effet, à cause de la normalisation des autocorrélations individuelles, l'ordre de grandeur du terme

$$\frac{A(m,n) A(m+u,n)}{\sum I(m,n)^2}$$

est équivalent dans chaque ligne.

Encore une fois, le nombre de grains de speckle ne permet pas de justifier théoriquement un tel passage à la limite. Néanmoins, la confrontation avec l'expérience permet de valider, au moins qualitativement, cette approximation. En effet, examinons-en les conséquences: si on développe (40) en y supprimant le second terme, on obtient:

$$g_1(l) = \text{FFT}_1 \frac{R(u)}{\langle R_B(u) \rangle} = \sum_n \frac{|\text{FFT}_1 A(m,n) S(m,n)|^2}{N - \sum_m |I(m,n)|^2}$$

avec

$$|\text{FFT}_1 A(m,n) S(m,n)|^2 = |\tilde{A}(l,n) * \tilde{S}(l,n)|^2 \quad (41)$$

$$\text{avec } \tilde{A}(l,n) = \text{FFT}_1 A(m,n)$$

$$\tilde{S}(l,n) = \text{FFT}_1 S(m,n) = \text{FFT}_1 [1 + \cos(\frac{m2\pi}{L} - \phi(n))]$$

$$= 1 \quad l=0$$

$$= \frac{1}{2} e^{\pm i\phi} \quad l = \frac{2N}{L}, -\frac{2N}{L} \quad (\text{transformée de Fourier sur } 2N \text{ points!})$$

On peut appliquer à (41) un raisonnement analogue à celui du IV.2.3.1 : si pour chaque ligne d'indice  $n$ ,  $\tilde{A}(l,n)$  n'a pas de composante significative au delà de  $2N/L$ , le sommet du pic de  $g_1(l)$  sera une mesure de la fréquence des franges suivant l'axe  $m$ . On en déduit donc une estimation de la composante de vitesse le long de l'axe défini par l'indice  $m$ .

La figure IV.6 montre une illustration de cette technique dans le cas de deux densités de franges. L'autocorrélation moyenne  $R(u)$  présente, autour de l'origine, un pic important dû au speckle présent dans les franges. Ce pic empêche la bonne résolution du pic utile de  $g(l) = \text{FFT} R(u)$  situé à  $l \approx 2N/L$ . Par contre, en formant ( voir (39) )

$$R_1(u) = \frac{R(u)}{1 + \exp - \frac{u^2}{p^2}} \quad (42)$$

où  $p$  est un paramètre ajustable et, en calculant  $g_1(l) = |\text{FFT}_1 R_1(u)|$ , on obtient une excellente résolution du pic situé à la fréquence des franges. L'excellente qualité des autocorrélations et de leurs transformées de Fourier après correction (42) est une justification, au moins approximative, du passage de l'équation (40) à l'équation (41). On trouvera un exemple réel illustrant cette méthode à la figure IV.7.

On peut même aller plus loin dans la description de  $R(u)$ . Si on suppose que  $\tilde{A}(l,n)$  n'a pas de composantes appréciables au delà de  $\frac{2N}{L} = \frac{N}{L}$ , on peut écrire:

$$|\text{FFT}_1 \tilde{A}(m,n) \cdot S(m,n)|^2 = |\tilde{A}(1,n)|^2 + \frac{1}{4} |\tilde{A}(1 - \frac{2N}{L}, n)|^2 + \frac{1}{4} |\tilde{A}(1 + \frac{2N}{L}, n)|^2 \quad (43)$$

$$= |\tilde{A}(1,n)|^2 * |\tilde{S}(1,n)|^2 \quad (44)$$

et

$$R(u) = \langle R_B(u) \rangle = \frac{1}{N} \sum_n \frac{[A(u,n) \star A(u,n)]}{\sum_m |I(m,n)|^2} \cdot [S(u,n) \star S(u,n)] \quad (45)$$

où  $\star$  décrit l'autocorrélation (sur la variable  $u$ ) et  $*$  la convolution.

Puisque  $S(u,n) \star S(u,n) = \frac{2}{3} (1 + \frac{1}{2} \cos \frac{2\pi u}{L})$

$$R(u) = \langle R_B(u) \rangle \cdot [S(u) \star S(u)] \cdot \sum_n \frac{[A(u,n) \star A(u,n)]}{\sum_m |I(m,n)|^2} \cdot \frac{1}{N} \quad (46)$$

$$= \frac{2}{3} \langle R_B(u) \rangle \cdot (1 + \frac{1}{2} \cos \frac{2\pi u}{L}) \cdot G(u)$$

Cette situation est schématisée à la figure IV.7 que l'on pourra comparer aux courbes réelles de la figure IV.6. On notera sur les courbes  $g_1(l)$  que le rapport des hauteurs des pics à la fréquence des franges et à  $l=0$  est bien d'approximativement quatre comme prévu à l'équation (43).

### 1.3.2.2 Performances et limitations

La technique d'autocorrélation a deux points communs avec la technique de moyennage unidimensionnel de l'intensité décrite au 1.3.1.2 :

- le même critère de validité : si le spectre moyen  $g_1(l)$  comporte un pic symétrique bien isolé autre que celui à l'origine, la position du sommet de ce pic sera une bonne estimation de la composante du déplacement

le long de l'axe défini par l'indice sur lequel on calcule les auto-corrélations.

- b) Expérimentalement, on constate que cette technique fonctionne très bien pour cinq franges ou plus. Il s'agit de la même limite que pour la technique du 1.3.1.2. Par contre, il n'existe pas de technique analogue à celle du 1.3.1.3 pour pouvoir traiter le nombre minimum de franges: trois. La technique de moyennage direct est donc plus indiquée pour traiter les plus faibles déplacements, de l'ordre de grandeur de diamètre moyen des images des particules. Enfin, la technique d'analyse par auto-corrélation ne permet pas traiter des franges de très faible contraste.

Le prix à payer pour ne plus devoir mesurer indépendamment l'angle est évidemment l'augmentation considérable du nombre de calculs. Ce nombre doit encore être multiplié si on se souvient que l'application de (32) ou (36) ne nous fournit que la valeur absolue (et pas le signe !) de la composante du déplacement le long d'une direction. Pour reconstituer entièrement la direction du déplacement, trois mesures suivant trois directions indépendantes sont nécessaires. Si on choisit par exemple deux axes orthogonaux et la direction située à  $45^\circ$  de chaque axe, il peut encore arriver que les franges soient quasi parallèles à l'un de ces trois axes. La périodicité suivant cet axe sera trop faible pour pouvoir être mesurée et une quatrième mesure sera nécessaire (le long de l'autre direction diagonale, par exemple).

La forte augmentation du temps de calcul est un inconvénient majeur, qui peut néanmoins être compensé en organisant correctement les calculs. L'algorithme d'autocorrélation (32) est simple et pourrait très bien être calculé par un circuit spécialement conçu dans ce but, dont la pièce maîtresse peut être un multiplieur rapide.

## 1.4 Acquisition des franges et traitement des données

### 1.4.1 Acquisition par balayage mécanique

Ici, je ne peux résister au plaisir de décrire le premier système d'acquisition d'images qui a permis de constituer un petit stock d'images pour mettre au point les techniques décrites aux 1.3.2 et 1.3.3. La figure IV.8 montre un schéma de l'installation qui dans son genre est assez pittoresque, comme le montre la photographie de la figure IV.9. La transformée de

Fourier de la région éclairée de la photographie P se trouve dans le plan FP où est disposé un petit obstacle circulaire permettant de bloquer le faisceau non diffracté. La lentille  $L_4$  permet d'imager les franges dans le plan d'un photodétecteur monté sur une table motorisée se déplaçant dans une direction parallèle à l'axe du miroir mobile M. Le déplacement du photodétecteur combiné à la rotation du miroir M permet de créer un système de lignes et de colonnes pour la numérisation de l'image. Une électronique appropriée, décrite à l'annexe VII, fournit les signaux cadencés de commande: rampe analogique pour le miroir, impulsions pour le moteur pas-à-pas et impulsions de synchronisation pour le convertisseur analogique-numérique qui n'est autre que le système d'acquisition de données de l'IVK. Les données sont copiées sur un disque souple et introduites par ce moyen dans l'ordinateur CDC de l'U.L.B. La transcription du mode d'écriture Digital au mode standard IBM du centre de calcul a constitué, et de très loin, le plus effroyable casse-tête de l'opération.

Les deux avantages du système sont l'excellent rapport signal sur bruit et la possibilité de numériser une image en un nombre arbitraire de points. Par contre, la complication mécanique et l'extrême lenteur (plusieurs minutes pour  $128 \times 128$  points) diminuent la valeur pratique de ce montage. En plus, il est difficile d'assurer une numérisation sur une maille parfaitement carrée et la photodiode utilisée ne permettait pas une bonne uniformité de la sensibilité. En effet, le "trou d'épingle" situé devant la photodiode était distant de quelques millimètres de celle-ci. Le pinceau de lumière passant à travers le trou pouvait toucher différentes parties de la surface sensible au cours du mouvement de la table motorisée et pouvait sans doute manquer en partie la photodiode. On peut voir à la figure IV.5 certaines manifestations de cet effet (manque de symétrie). Notons encore à ce propos que le manque de symétrie au centre de l'image peut être dû à des effets de diffraction sur l'obstacle situé dans le plan PF.

#### 1.4.2 Acquisition par caméra vidéo et traitement en temps réel

Le montage mécanique précédent n'a été utilisé que pour pallier l'absence momentanée d'un véritable système d'analyse d'images qui est maintenant disponible à l'Institut Von Karman.

Le fonctionnement de ce montage (Figure IV 10) est tout-à-fait identique à celui du dispositif mécanique de la figure IV 8. Le plan de Fourier est

ici imagé sur un tube vidicon et le signal vidéo est numérisé en  $256 \times 256$  pixels (8 bits de résolution) en un temps suffisamment court pour pouvoir restituer l'image numérisée en "temps réel" sur le moniteur TV. La fonction acquisition est effectuée par une carte spécialisée (MATROX) insérée dans le bus de l'ordinateur PDP 11-34. Une dynamique limitée ( $\approx 100:1$ ) et une maille de numérisation rectangulaire (rapport  $\approx 1.4$ ) constituent les deux défauts de ce système. La figure IV.13 montre l'effet de la maille rectangulaire: l'angle  $\theta$  vaut  $\theta = \text{arctg } 1.4 \approx 35^\circ$ .

Le montage optique de la figure IV.10 demande un commentaire:

les lentilles  $L_1$  et  $L_2$  servent à ajuster le diamètre du faisceau sur la photographie. Le laser utilisé (Spectra-Physics 136-1, 2mW) a son beam waist situé à la sortie du laser. Si la distance entre la lentille  $L_1$  et le laser vaut la distance focale, le beam waist se trouvera dans le plan focal arrière de la lentille. On peut ainsi, de proche en proche, reproduire le beam waist en lui donnant la dimension que l'on désire (Figure IV.11).

On peut se demander la raison d'un éclaircissement gaussien de la photographie, qui en plus est fixé une fois pour toute lors de l'expérience.

On pourrait aussi élargir fortement le faisceau et utiliser un trou circulaire (éventuellement réglable). Des essais ont pu montrer que, dans ce cas, les lobes du faisceau non diffracté sont très gênants quand on diminue le diamètre du trou pour améliorer la résolution. Un éclaircissement gaussien permet de supprimer ces lobes, de minimiser la dimension du faisceau non diffracté et donc aussi la dimension de l'obstacle à disposer pour le bloquer.

Une autre technique pour limiter l'importance de ce faisceau consiste à utiliser une copie positive (fond noir) sur plaque holographique de la photographie à analyser. Ceci diminue l'intensité du faisceau central (et ne le supprime pas parce que le fond n'est pas totalement opaque). En plus, on est sûr de la planéité de l'image et on élimine le speckle de fond lié au support plastique du film, ce qui améliore beaucoup le rapport signal sur bruit.

Comme on a pu le remarquer à la figure IV.2, seule la partie centrale ( $128 \times 128$  points) de la camera est utilisée, le nombre de points étant largement suffisant pour analyser des franges à basse fréquence. Pour la mise en oeuvre de la technique de moyennage unidimensionnel de l'intensité, l'opérateur génère une ligne artificielle passant par le centre des franges, ligne dont il ajuste l'orientation jusqu'à ce qu'elle soit parallèle aux franges.

L'ordinateur effectue alors le moyennage en tenant compte de l'angle. Pour éviter la rotation des franges qui est une opération longue, on moyenne les

lignes de la caméra en introduisant un décalage tenant compte de l'angle (Fig.IV.12). Si  $\alpha$  est l'angle entre les franges et l'axe  $n$ , l'ordinateur effectue l'intégration unidimensionnelle en calculant:

$$I_0(m) = \sum_{n=64}^{191} I(64+m+(n-128) \cdot \text{tg} \alpha, n) \quad 0 \leq m \leq 127 \quad (47)$$

La périodicité de  $I_0(m)$  sera  $d/\cos \alpha$  et sa fréquence sera proportionnelle à la composante de déplacement le long de l'axe  $m$ . Naturellement, quand l'angle  $\alpha$  est trop grand, les rôles des indices  $m$  et  $n$  sont intervertis. Cette variante ne change rien à l'analyse du IV.2.3.1. L'analyse de la vitesse en un point prend quelques secondes avec cet algorithme.

La technique d'autocorrélation est implantée telle qu'elle est décrite au IV.1.3.2. Le choix entre les deux algorithmes (32) et (36) doit se faire en comparant le nombre de multiplications dans chaque algorithme. Le nombre de multiplications réelles pour le calcul d'une autocorrélation sur  $N=128$  points est

$$N_1 = \frac{N(N+1)}{2} = 128 \times 129 / 2$$

Le nombre de multiplications réelles pour une FFT calculée sur  $N'=2N=256$  points vaut

$$N_2 = 2N' \log_2 N' = 2 \times 256 \times 8 \approx N_1 / 2$$

Comme l'algorithme d'autocorrélation peut être écrit en assembleur de manière très simple et très compacte, il n'en ressort pas d'avantage décisif en faveur de la FFT et pour ce nombre réduit de points, il a été choisi d'utiliser l'algorithme sous sa forme (32). Néanmoins, avec l'ordinateur utilisé (PDP 11/34 en multiutilisateurs), la mesure d'une composante prend environ quarante secondes.

La fig. IV.13 représente les quatre directions d'estimation des autocorrélations (directions  $m, n, +$  et  $-$ ). Pour l'exemple représenté, l'angle  $\alpha$  et l'interfrange sont déduits des périodes OA, OB et OC.

Pour les deux méthodes, une approximation parabolique permet d'interpoler la position du sommet du pic le plus important dans l'espace de Fourier. C'est la position de ce sommet qui est adoptée comme estimation de la composante mesurée.

### 1.4.3. Précision des techniques d'analyse

Comme précisé précédemment, seule la confrontation à l'expérience peut établir rigoureusement la validité des techniques exposées aux 1.3.1 et 1.3.2. La production d'un écoulement d'étalonnage dont la distribution de vitesse est connue à mieux de 1% est extrêmement difficile. On est réduit alors à utiliser deux types de validation:

- Calculer, à partir du champ de vitesse d'un écoulement réel, des grandeurs très sensibles aux erreurs de mesure, dépendant par exemple des dérivées spatiales de la vitesse. On verra un exemple au chapitre VI où on vérifiera qu'un écoulement est bien potentiel.
- Créer un écoulement artificiel à partir d'un déplacement solide étalonné.

Cette dernière option a été choisie en réalisant une suspension de particules de latex (diamètre:  $5.8 \mu\text{m}$ ) dans de la glycérine. Cette suspension a été éclairée par un feuillet lumineux (laser  $\text{Ar}^+$  :  $5145 \text{ \AA}$ ) et photographiée en simple exposition avec un agrandissement de  $\approx 0.7$ . Le négatif a alors été reproduit à l'agrandissement unitaire en double exposition (incohérente) en subissant un déplacement transversal entre les deux expositions. On obtient ainsi un positif simulant un écoulement uniforme. Notons qu'il était impossible de faire subir le déplacement à la cellule entre les deux expositions, à cause des (faibles) mouvements de convection dans la glycérine.

Il est important de réaliser que l'erreur de mesure que l'on commet est une variable statistique à cause du speckle résultant de la distribution aléatoire des particules dans la région considérée. Tout ce que l'on pourra mesurer est une approximation de la distribution statistique de l'erreur. On prendra l'écart quadratique moyen comme une estimation de l'erreur moyenne.

Quand le diamètre du faisceau d'éclairage est de  $0.5 \text{ mm}$ , le déplacement limite à partir duquel le contraste diminue fortement est d'environ  $200 \mu\text{m}$ . Pour  $d = 200 \mu\text{m}$ , le déplacement a été mesuré en soixante points différents au moyen des deux techniques: moyennage des lignes (§.1.3.1.2 ; estimation notée  $d_m$ ) et autocorrélation (§.1.3.2 ; estimation notée  $d_a$ ).

On a obtenu (  $\sigma$  étant l' écart quadratique moyen ) :

$$\begin{aligned}\sigma(d_m) &= 2.1 \mu\text{m} \\ \sigma(d_a) &= 2.5 \mu\text{m} \\ \langle (d_m - d_a) \rangle &= 0.25 \mu\text{m} \\ \sigma(d_m - d_a) &= 1.5 \mu\text{m}\end{aligned}\tag{48}$$

La même mesure pour un déplacement de 150  $\mu\text{m}$ , effectuée sur un plus petit nombre (35) de points, donne

$$\begin{aligned}\sigma(d_m) &= 2.2 \mu\text{m} \\ \sigma(d_a) &= 2.5 \mu\text{m} \\ \langle (d_m - d_a) \rangle &= 0.3 \mu\text{m} \\ \sigma(d_m - d_a) &= 1.8 \mu\text{m}\end{aligned}\tag{49}$$

En plus, dans les deux cas, l' écart ne dépassait jamais  $2.5 \sigma$ . On peut conclure de (48) et (49) que les deux techniques donnent des estimations moyennes semblables, produisent des erreurs de mesure peu corrélées dont la valeur moyenne est d' environ 2.5  $\mu\text{m}$  (1.25 % de la valeur maximum). Cette valeur est très proche du minimum espérable. En effet, produire des franges revient, physiquement parlant, à effectuer une corrélation optique entre les images successives d'une même particule. Il est certain qu'on ne peut aboutir à une grande précision que pour autant que les images soient parfaitement identiques. En mettant à part les effets extérieurs qui peuvent décorrélérer les images (éclairage non uniforme par exemple), il existe un paramètre qui empêche la reproduction parfaite des images: le grain du film et la résolution limitée qui en découle. L' erreur moyenne de 2.5  $\mu\text{m}$  correspond assez bien à la résolution du film utilisé ( 300 lignes / mm).

Il est important de remarquer que les erreurs (48) et (49) sont des erreurs absolues indépendantes de la valeur mesurée. Ceci diffère très fortement des précisions annoncées dans la littérature<sup>142,145,151</sup> traitant de l' analyse

des franges de photographie de speckle en mécanique du solide. On y avance allègrement des précisions relatives inférieures à 1%, ce qui signifie des précisions absolues bien inférieures à la longueur d'onde pour de faibles déplacements (quelques dizaines de microns).

La précision sur la mesure de l'angle doit être estimée de manière différente pour les deux méthodes. En effet, pour la méthode d'autocorrélation, l'angle se déduit d'une combinaison de mesures de déplacements et c'est l'imprécision de celles-ci qui détermine l'erreur sur l'angle. Par contre, pour la mesure de moyennage, la détermination de l'angle dépend de l'habileté de l'opérateur à effectuer une corrélation (analogique) entre la ligne d'évaluation et l'ensemble de l'image. Généralement, l'oeil arrive à aligner la ligne avec une sensibilité égale à l'incrément d'angle ( $1^\circ$ ). Les deux méthodes utilisées concurremment fournissent généralement des estimations de l'angle concordant à moins de  $2^\circ$ .

### 1.5 Effet d'un déplacement fini et de gradients de déplacements.

#### Dynamique de mesure

Jusqu'ici, on a supposé que le déplacement était uniforme et faible devant le diamètre du faisceau servant à rééclairer localement la photographie. L'effet d'un déplacement fini et de gradients de déplacements est encore une fois difficile à traiter à cause du faible nombre de particules dans un domaine d'analyse. Comme pour le speckle non-gaussien décrit à l'annexe VI, nous ne pourrions en décrire que l'effet moyen. Les résultats d'un tel calcul ne donneront donc pas l'effet réel mesuré sur chaque système individuel de franges, mais une tendance qui ne sera observée qu'en moyenne.

Pour ce calcul, on peut reprendre les équations IV.(1) et IV.(4) décrivant l'amplitude lumineuse derrière la photographie

$$U(\vec{r}_0) = P(\vec{r}_0) \cdot \left\{ \sum_i f_i(\vec{r}_0) * [\delta(\vec{r}_0 - \vec{r}_i) + \delta(\vec{r}_0 - \vec{r}_i - \vec{d})] \right\} \quad (50)$$

où la somme porte sur l'ensemble des particules de l'écoulement et  $\vec{d}$  dépend de la position des particules, c'est à dire de  $\vec{r}_i$ . On fait alors la moyenne du spectre de puissance de (50) sur toutes les positions possibles ( $\vec{r}_i$ ) des particules. L'annexe VIII explicite les calculs pour un faisceau

gaussien  $P(\vec{r}_0) = \exp -r_0^2/w^2$  et dans le cas d' un déplacement uniforme mais fini et dans trois cas de déplacements bidimensionnels incompressibles: déformation pure, rotation d' ensemble et un cas de déformation et de rotation composés (cisaillement linéaire).

L' analyse de l' annexe VIII montre qu' un déplacement fini mais uniforme produit une diminution uniforme de contraste, due aux particules présentes dans le volume de mesure lors d' une exposition et absentes lors de la seconde. Par contre, un mouvement non-uniforme cause une diminution non-uniforme de contraste, due au moyennage de franges de pas et d' orientation différents (voir fig.A18, annexe VIII). L' importance de ce dernier effet peut être diminué en améliorant la résolution, c' est à dire en réduisant le diamètre du faisceau d' éclairage, pour autant que celui-ci reste suffisamment grand devant le déplacement.

Un déplacement non-uniforme peut aussi induire une variation de la périodicité des franges. La fréquence mesurée n' est plus une mesure de la vitesse au centre de la zone éclairée. Cet effet ne dépend que du taux de variation du déplacement (gradient de déplacement) et n' est pas sensible au diamètre de la région éclairée. La seule manière de résoudre ce problème consiste à diminuer tous les déplacements ( et donc les gradients aussi ) en réduisant le temps délai entre les deux expositions. L' annexe VIII donne des ordres de grandeur des erreurs montrant que, dans des cas usuels, cet effet n' est pas très important.

Les techniques d' analyse exposées précédemment restent-elles valables quand le contraste n' est pas unitaire ? En fait, les techniques décrites au 1.3. permettent, en toute généralité, d' extraire la périodicité d' un signal et restent parfaitement valables si le "critère de qualité" est bien respecté: pics de Fourier bien résolus. Néanmoins, dans le cas d' un contraste non uniforme, une des techniques ne peut être appliquée: la technique d' amélioration de la résolution du 1.3.1.3 (passage aux logarithmes) perd toute fiabilité. La mesure de franges très espacées et de mauvais contraste est donc très difficile.

La limitation du déplacement par la dimension finie du faisceau d' éclairage impose une limite à la dynamique de mesure. Si on désire une résolution équivalente à celle d' un vélocimètre Doppler, on doit utiliser un faisceau dont le diamètre n' excède pas quelques dixièmes de millimètres. Par exemple, pour  $\phi=0.5$  mm , le déplacement maximum compatible avec un bon contraste est d' environ 200  $\mu$ m. Comme il faut au moins trois franges pour pouvoir mesurer

le déplacement, le déplacement minimum doit être quelque peu supérieur à la dimension moyenne des images des particules (environ  $20 \mu\text{m}$ ). Une valeur pratique du déplacement minimum est de  $30 \mu\text{m}$ . La dynamique de mesure est donc de  $200/30 \approx 6.5$  ce qui n'est pas énorme. On met là le doigt sur un des gros désavantages de la technique: la dynamique limitée.

Cette valeur de la dynamique limite est évidemment un ordre de grandeur et peut être augmentée si on arrive à mesurer des déplacements plus faibles. On en verra un exemple au Chapitre V, où l'usage de l'exposition multiple et de la technique d'analyse par logarithme ( § IV.1.3.1.3 ) permet d'élever la valeur de la dynamique de mesure à 9/1.

## 2. ECLAIREMENT GLOBAL - FILTRAGE SPATIAL

On a vu au chapitre II la possibilité d'obtenir des franges d'égale composante de déplacement en utilisant un dispositif de filtrage spatial. Celui-ci est un système imageant où le masque de filtrage joue le rôle de diaphragme. La fonction de transfert peut se trouver en supposant que les deux lentilles effectuent des opérations de transformées de Fourier parfaites.

Si la transparence de la photographie est  $t(\vec{r}_0)$  (voir figure II 6), l'amplitude dans le plan de la transformée de Fourier vaut

$$U(\vec{r}_f) = K(\vec{r}_f) \cdot \text{TF}_{\vec{r}_f} [t(\vec{r}_0)] \quad (51)$$

où  $K(\vec{r}_f)$  décrit la pupille dans le plan de Fourier (masque de filtrage). L'amplitude dans le plan image (I) vaudra alors

$$A(\vec{r}_i) = t(-\vec{r}_i) * \text{TF}_{\vec{r}_i} K(\vec{r}_f) \quad (52)$$

La fonction de transfert vaut donc

$$\text{TF } K = \iint e^{-\frac{2\pi}{\lambda f} (x_f x_i + y_f y_i)} K(x_f, y_f) dx_f dy_f \quad (53)$$

Si  $K(\vec{r}_f)$  décrit un trou circulaire situé en  $\vec{r}_f = \vec{f}_0 \lambda f = \vec{\rho}$  et de rayon  $a$ ,  $\text{TF } K$  vaudra, à un facteur près

$$\text{TF } K = e^{-2\pi j \vec{f}_0 \cdot \vec{r}_i} \frac{J_1(2\pi r_i \Delta f)}{2\pi r_i \Delta f} \quad (54)$$

$$\text{avec } \Delta f = \frac{a}{\lambda f}$$

et donc

$$A(\vec{r}_i) = \iint t(\vec{r}-\vec{r}_i) e^{-2\pi j \vec{f}_0 \vec{r}} \frac{J_1(2\pi r \Delta f)}{2\pi r \Delta f} d\vec{r} \quad (55)$$

$$\text{si } t(\vec{r}_0) = C(\vec{r}_0) + C(\vec{r}_0 - \vec{d}) \quad \text{avec } \vec{d} = \vec{d}(\vec{r}_0)$$

$$A(\vec{r}_i) = \iint [C(\vec{r}-\vec{r}_i) + C(\vec{r}-\vec{r}_i - \vec{d})] e^{-2\pi j \vec{f}_0 \vec{r}} \frac{J_1(2\pi r \Delta f)}{2\pi r \Delta f} d\vec{r} \quad (56)$$

$$\text{avec } \vec{d} = \vec{d}(\vec{r}-\vec{r}_i)$$

Dans la deuxième intégrale de (56), on va effectuer le changement de variable

$$\vec{\xi} = \vec{r} - \vec{d}$$

en supposant que les gradients de déplacements soient suffisamment petits pour que le jacobien de la transformation soit unitaire, c'est-à-dire

$$\left| \det \left[ \frac{\partial d_i}{\partial x_j} \right] \right| = \left| \frac{\partial d_x}{\partial x} \frac{\partial d_y}{\partial y} - \frac{\partial d_y}{\partial x} \frac{\partial d_x}{\partial y} \right| \ll 1 \quad (57)$$

Dans ces conditions

$$A(\vec{r}_i) = \iint C(\vec{r}-\vec{r}_i) \left[ \frac{J_1(2\pi r \Delta f)}{2\pi r \Delta f} + e^{-2\pi j \vec{f}_0 \vec{d}} \frac{J_1(2\pi |\vec{r}+\vec{d}| \Delta f)}{2\pi |\vec{r}+\vec{d}| \Delta f} \right] e^{-2\pi j \vec{f}_0 \vec{r}} d\vec{r} \quad (58)$$

Si on suppose que le déplacement est plus petit que la zone de résolution

$$d \ll \frac{1.2}{\Delta f} = 1.2 \frac{\lambda f}{a} \quad (59)$$

donc

$$\frac{J_1(2\pi |\vec{r}+\vec{d}| \Delta f)}{2\pi |\vec{r}+\vec{d}| \Delta f} \approx \frac{J_1(2\pi r \Delta f)}{2\pi r \Delta f} \quad (60)$$

et

$$A(\vec{r}_i) = \iint C(\vec{r}-\vec{r}_i) e^{-2\pi j \vec{f}_0 \vec{r}} \frac{J_1(2\pi r \Delta f)}{2\pi r \Delta f} (1 + e^{-2\pi j \vec{f}_0 \vec{d}}) d\vec{r} \quad (61)$$

Dans la zone de résolution, on peut approximer le déplacement

$$d_1(\vec{r}-\vec{r}_i) = d_1(-\vec{r}_i) - x_k \frac{\partial d_1}{\partial x_k} \Big|_{-\vec{r}_i} \quad \text{pour } r \gtrsim 1.2 \frac{\lambda f}{a}$$

$$\text{et si } x_k f_{0k} \frac{\partial d_1}{\partial x_k} \Big|_{-\vec{r}_i} \ll 1 \quad (62)$$

$$A(\vec{r}_i) = (1 + e^{-2\pi j \vec{f}_0 \vec{d}(-\vec{r}_i)}) \iint C(\vec{r}-\vec{r}_i) e^{-2\pi j \vec{f}_0 \vec{r}} \frac{J_1(2\pi r \Delta f)}{2\pi r \Delta f} d\vec{r} \quad (63)$$

On remarquera que l'intégrale contenue dans (63) est l'image de l'objet (en simple exposition) à travers le système optique. Si l'objet  $C(\vec{r}_0)$  comporte une microstructure aléatoire suffisamment fine pour que ses fréquences spatiales s'étendent au-delà de  $\vec{f}_0$ , alors cette intégrale sera non-négligeable et décrira un speckle. Ce speckle sera non gaussien puisque le nombre de particules contenues dans la zone de résolution n'est pas très grand. L'équation (63) décrit donc l'image de la transparence d'entrée "specklée" et multipliée par un système de franges répondant à l'équation

$$\vec{f}_0 \vec{d} = \frac{\vec{\rho}}{\lambda f} \vec{d} = n \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (64)$$

Rappelons les hypothèses qu'il a fallu faire pour aboutir à ce résultat:

- déplacement petit devant la tache de résolution (59), c'est-à-dire devant la dimension du grain de speckle
- gradients de déplacements faibles (57) (62). En particulier, la relation (62) peut s'écrire

$$\vec{r} \left( \frac{\vec{\rho}}{\lambda f} \text{ grad} \right) \vec{d} \ll 1 \quad \text{ou, avec (59)} \quad |\text{grad } d| \ll \frac{a}{\rho}$$

Or en vertu de (64), la distance  $\delta l$  entre deux franges vaut

$$|\text{grad } d| \cdot \delta l = \frac{\lambda f}{\rho}$$

Donc  $\frac{\lambda f}{\rho \delta l} \ll \frac{a}{\rho}$  et  $\delta l \gg \frac{\lambda f}{a}$

ce qui exprime que le pas des franges doit être plus grand que la taille du grain de speckle, ce qui est aisément compréhensible.

La non-observance de ces deux critères conduirait immanquablement à une diminution du contraste des franges.

Pratiquement, cette technique est extrêmement simple à mettre en oeuvre et donne instantanément des résultats d'ensemble. La possibilité de faire varier le pas des franges en déplaçant le trou de filtrage permet d'identifier facilement les franges et de leur assigner un ordre. Il suffit en effet d'écarter progressivement le trou de l'origine. On voit ainsi graduellement apparaître les franges d'ordre de plus en plus grand et on peut les suivre dans leur mouvement.

Le défaut du montage est celui commun à tous les systèmes de traitement d'images en optique cohérente: la sensibilité au bruit et en particulier à tous les défauts des films qui produisent un "speckle" de fond noyant l'image utile. Comme on le verra aux chapitres V et VI, cette technique ne peut s'appliquer vraiment que lorsque le rapport signal sur bruit des franges de Young produites par chaque région de la photographie est bon, par exemple lorsque le cliché a pu être enregistré en multiple exposition. Dans ce cas, on peut tenir le même raisonnement qu'au IV 1.3.1.3 pour constater que la présence de plus de deux images successives d'une même particule permet d'affiner les franges et d'augmenter leur densité d'énergie ainsi que le rapport signal sur bruit.

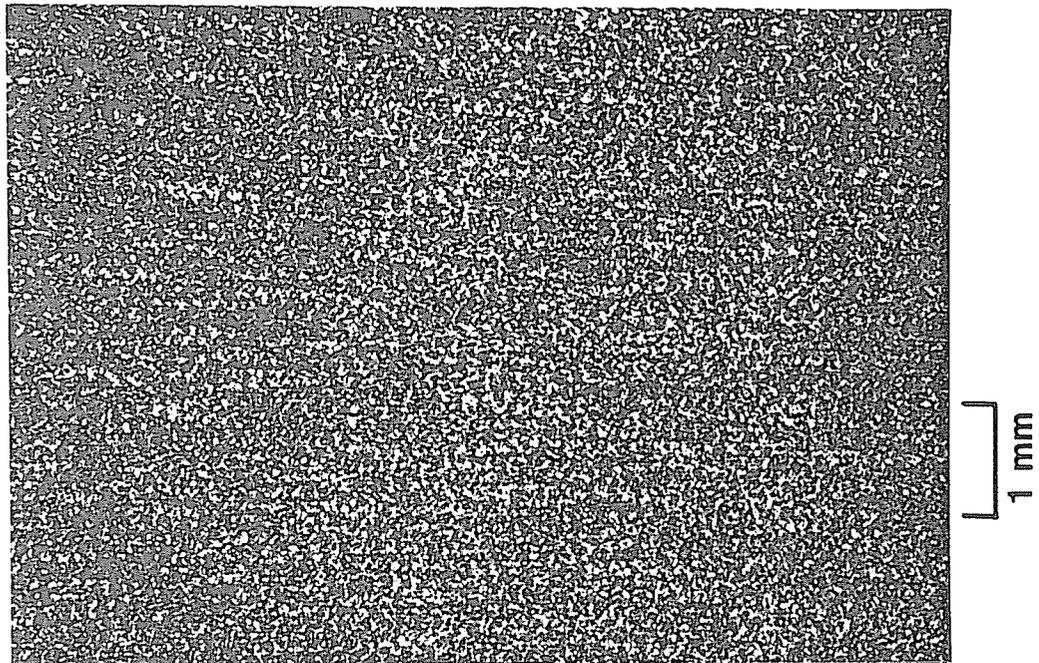


Fig.IV.1. Agrandissement (positif) d' une photographie en double exposition de particules illuminées par une "tranche" laser.

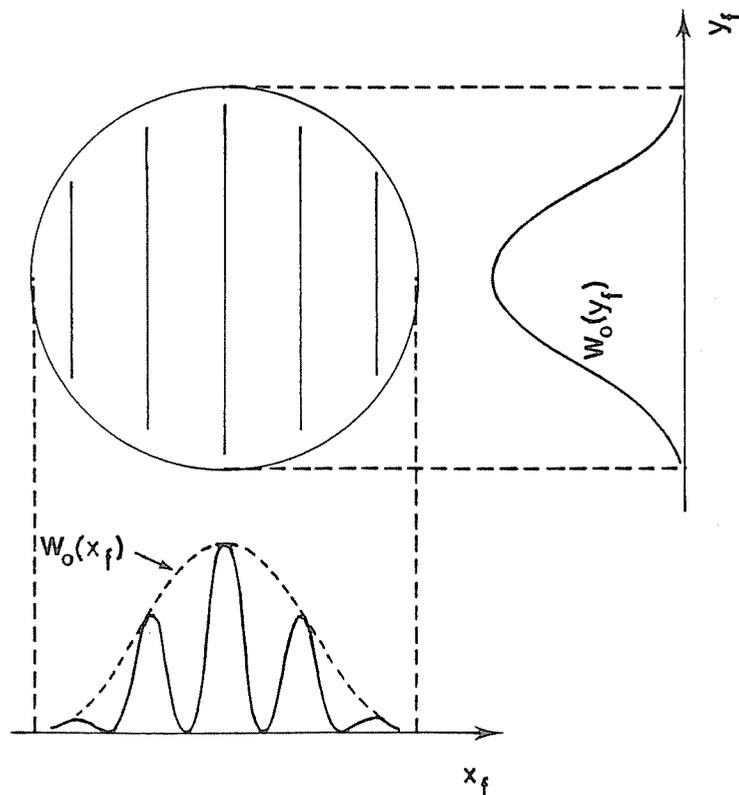
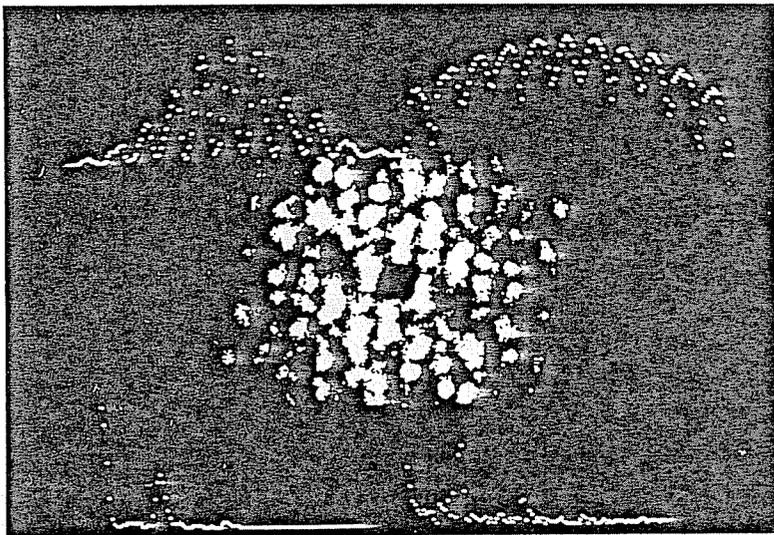
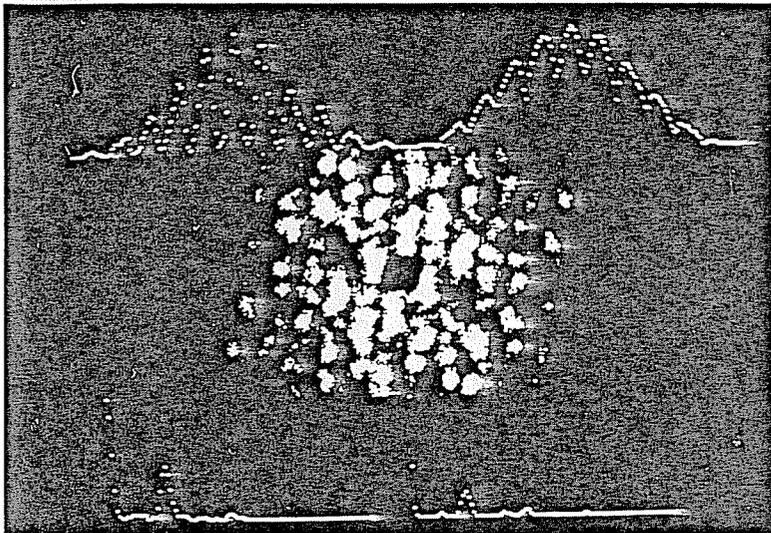


Fig.IV.2. Traitement des franges en mécanique du solide: extraction de l' enveloppe des franges ( $W_0$  ).

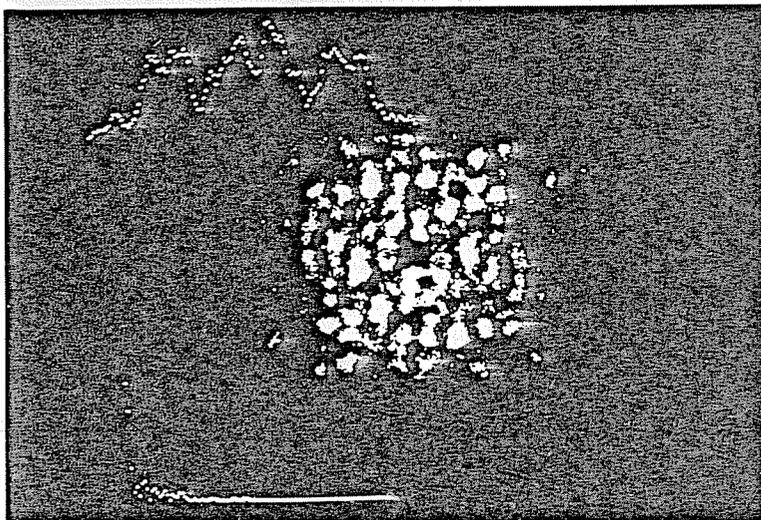


a

A	B
C	D



b



c

FIG. IV.3.

Exemple de franges traitées au moyen du système d'analyse d'images du § III.1.4.2.

Centre des images : Intensité lumineuse  $I(m,n)$   $0 \leq m, n \leq 127$

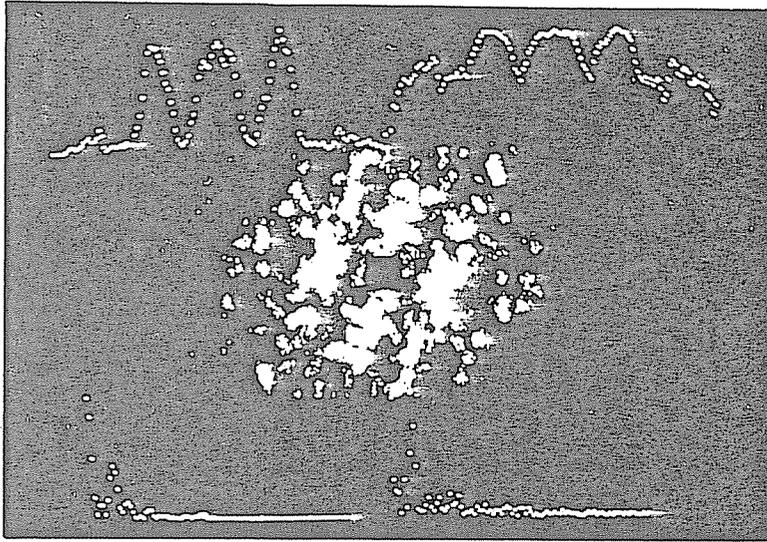
Photo (a) - A: Intensité intégrée parallèlement aux franges,  $I_0(m)$   $0 \leq m \leq 127$  (voir l'éq. IV.47)

B:  $I_1(m) = \log I_0(m)$  ; C:  $f_1(l) = |FFT I_0(m)|$  (80 premiers points d'une FFT sur 256 points) ; D:  $f_1(l) = |FFT I_1(m)|$

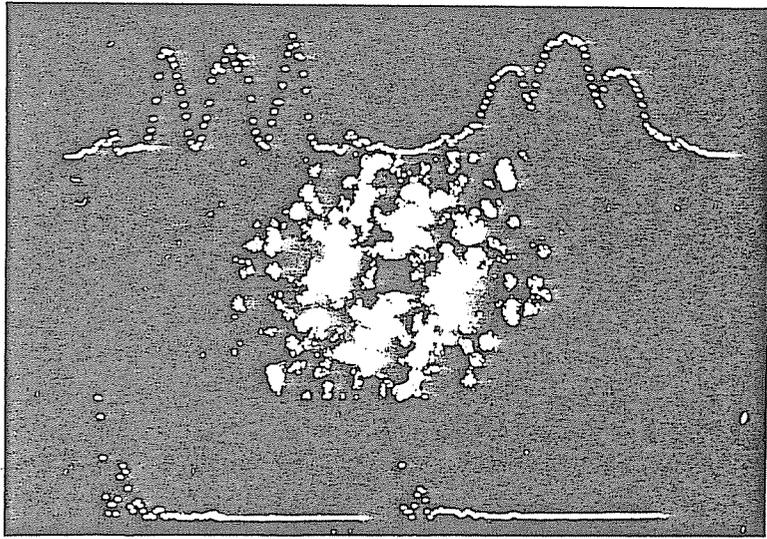
Photo (b) - Mêmes franges qu'à la photo (a). A:  $I_0(m)$  ; B:  $I_2(m) = [\log I_0(m)] \cdot \sin^2 \frac{\pi m}{127}$

C:  $f_1(l) = |FFT I_0(m)|$  ; D:  $f_2(l) = |FFT I_2(m)|$

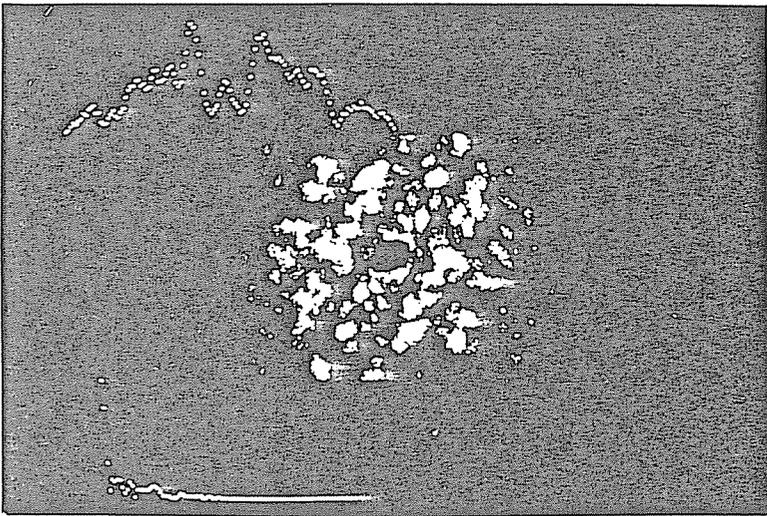
Photo (c) - A: Intensité intégrée perpendiculairement aux franges.



d



e



f

FIG. IV.3.

Même traitement que celui illustré aux figures IV.3. a, b et c , mais pour un faible déplacement ( faible nombre de franges ).

Photo (d) - même légende que pour la photo (a)

Photo (e) - même légende que pour la photo (b)

Photo (f) - même légende que pour la photo (c).

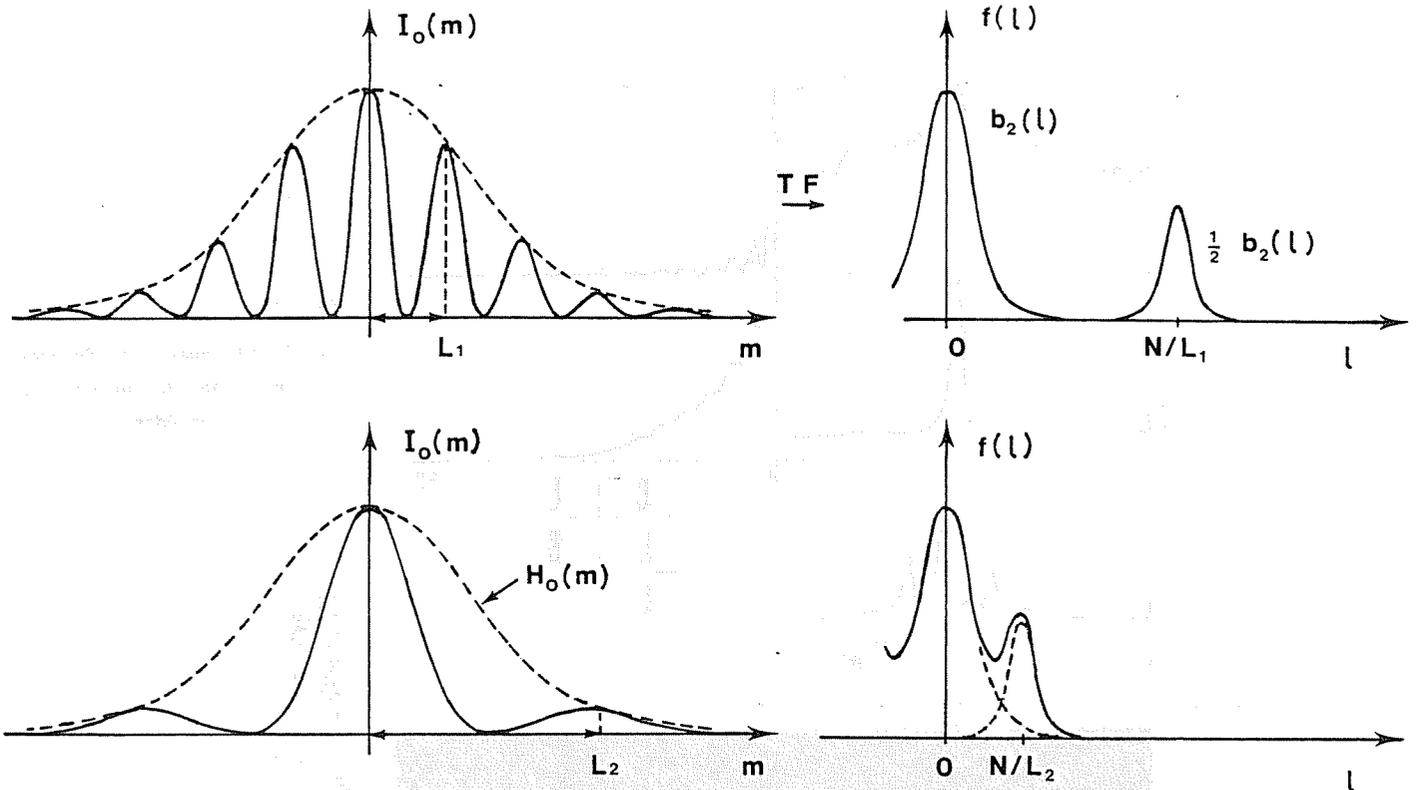


Fig. IV.4. Traitement schématique des franges par moyennage unidimensionnel.  
 Haut: nombre suffisant de franges.  
 Bas: nombre trop faible de franges. Interaction des pics dans l'espace de Fourier.

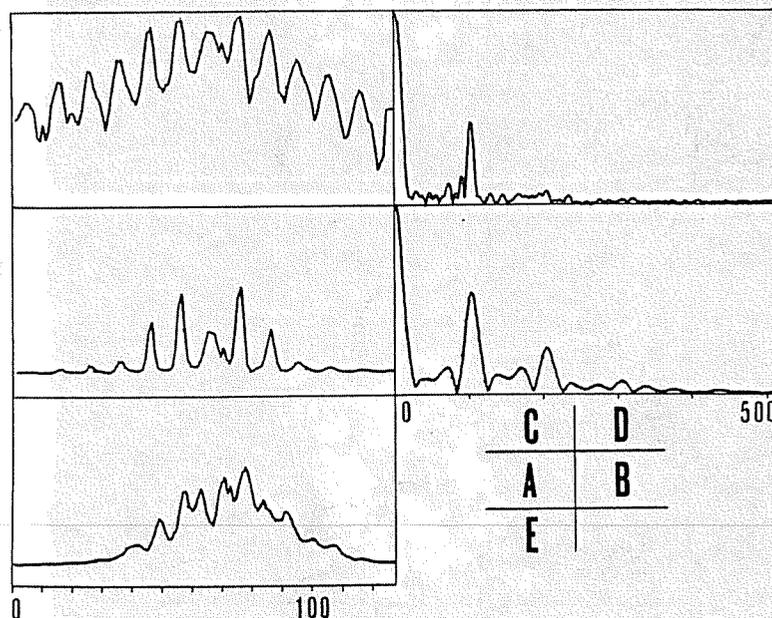


Fig. IV.5

Effet de l'exposition multiple. Les franges, d'intensité  $I(m,n)$ , sont parallèles à l'axe  $n$ .

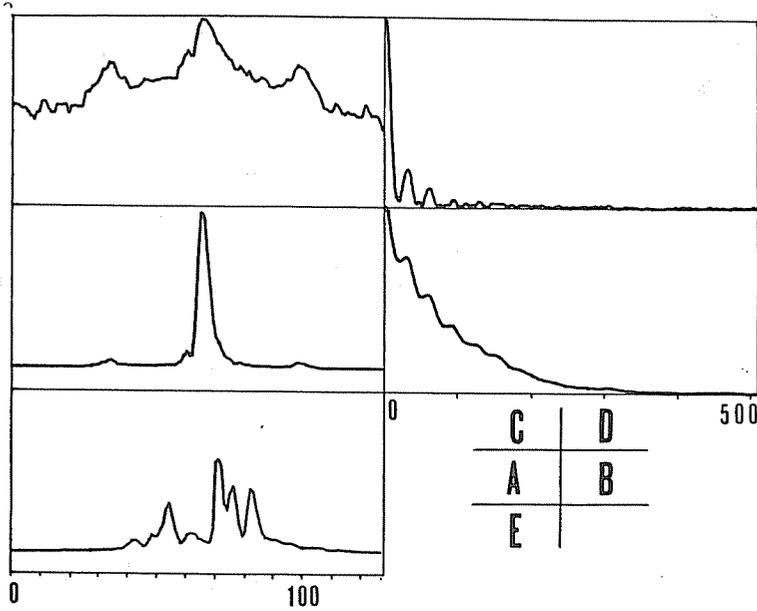
(a) - Nombre suffisant de franges.

A: Intensité intégrée parallèlement aux franges,  $I_0(m) = \sum_{n=0}^{127} I(m,n)$  ;

B:  $|FFT I_0(m)|$  (512 premiers points d'une FFT calculée sur 1024 points)

C:  $I_1(m) = \log I_0(m)$  ; D:  $|FFT I_1(m)|$

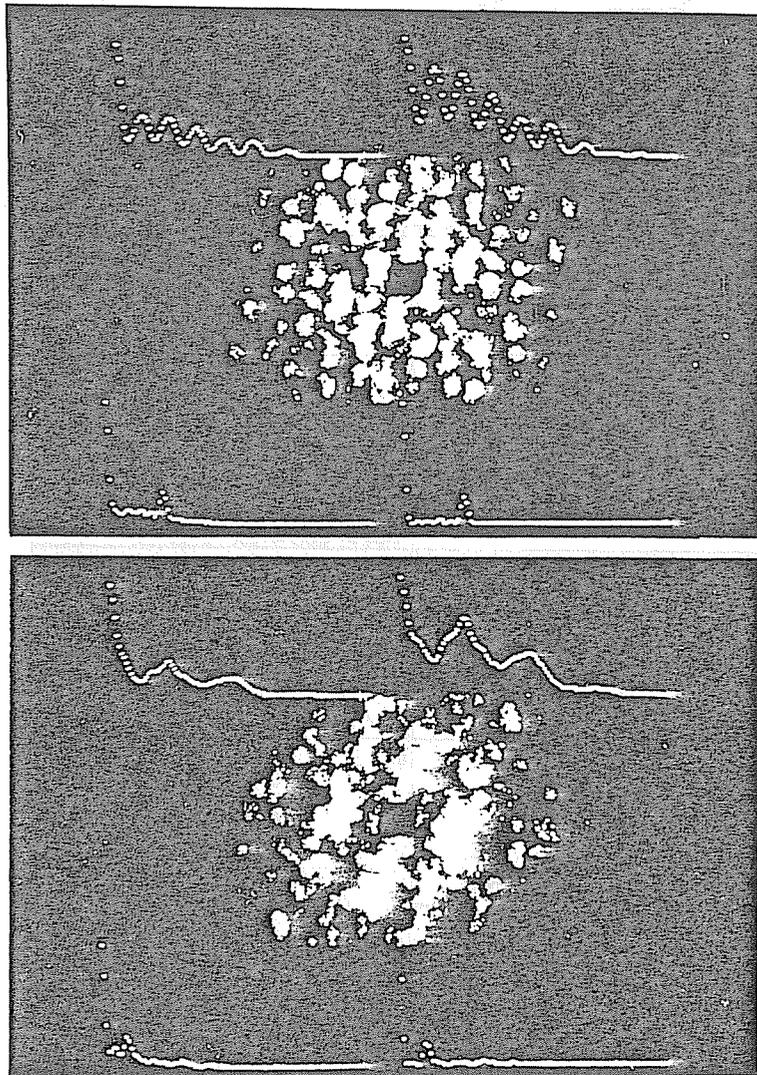
E: Intensité intégrée perpendiculairement aux franges,  $\sum_m I(m,n)$



b

FIG.IV.5

(b) Faible nombre de franges  
même légende que pour (a)  
(page précédente)



a

A	B
C	D

b

FIG.IV.6

Traitement par autocorrélation

- (a) - Mêmes franges qu' à la fig.IV.3 a et b. A: autocorrélation moyenne  $R(u)$ ;  
 B:  $R_1(u) = R(u)/(1+\exp-u^2/p^2)$ ; C:  $g(l) = \text{FFT } R(u)$  (80 points d' une FFT sur  
 1024 points) ; D:  $g_1(l) = |\text{FFT } R_1(u)|$  .  
 (b) - Mêmes franges qu' à la figure IV.3 d et e. Voir la légende de (a).

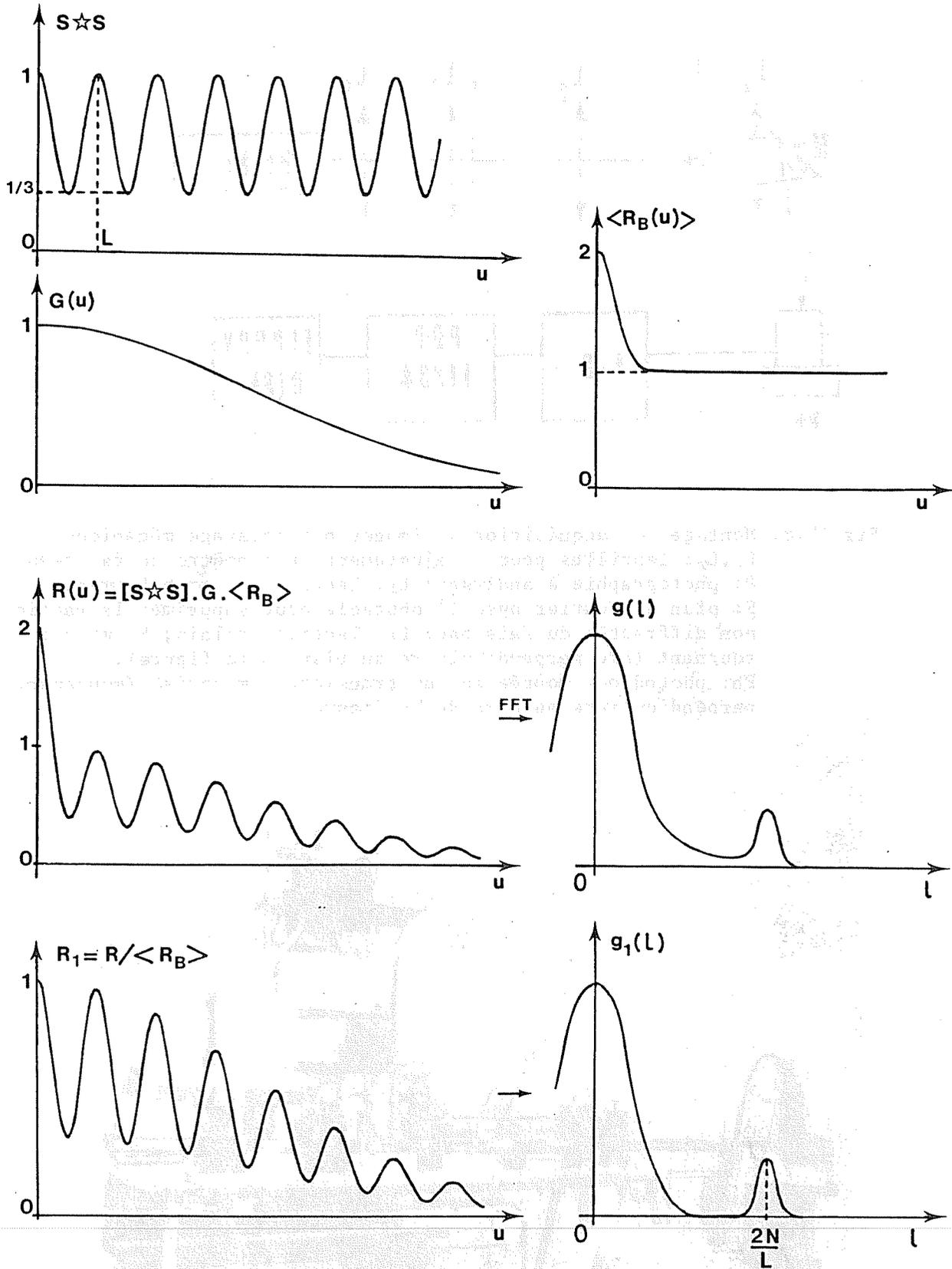


Fig.IV.7. Traitement schématique par autocorrélation. Décomposition des signaux.  $\star$  symbolise la corrélation et FFT désigne la transformée de Fourier.

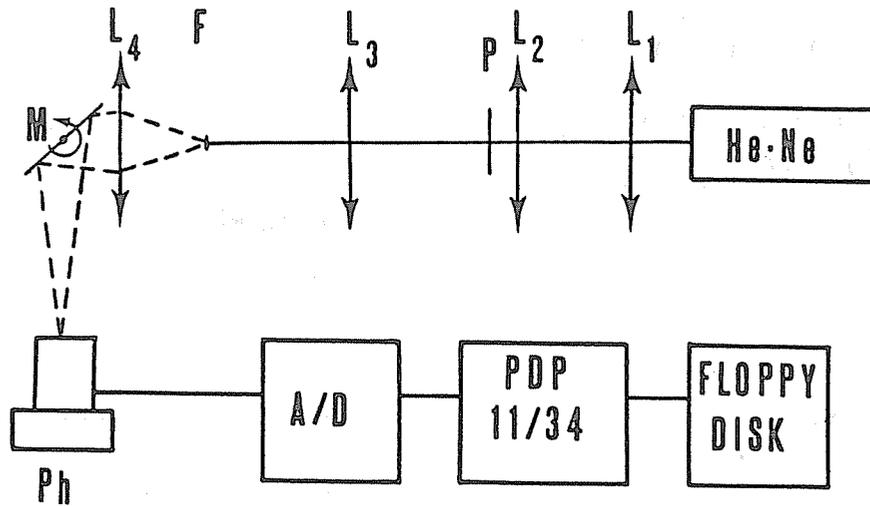


Fig.IV.8. Montage d'acquisition d'images par balayage mécanique.  
 $L_1, L_2$ : lentilles pour l'ajustement du diamètre du faisceau;  
 P: photographie à analyser;  $L_3$ : lentille de transformée;  
 F: plan de Fourier avec l'obstacle pour supprimer la partie non diffractée du faisceau;  $L_4$ : lentille relais; M: miroir tournant (axe perpendiculaire au plan de la figure);  
 Ph: photodiode montée sur un translateur motorisé (mouvement perpendiculaire au plan de la figure).

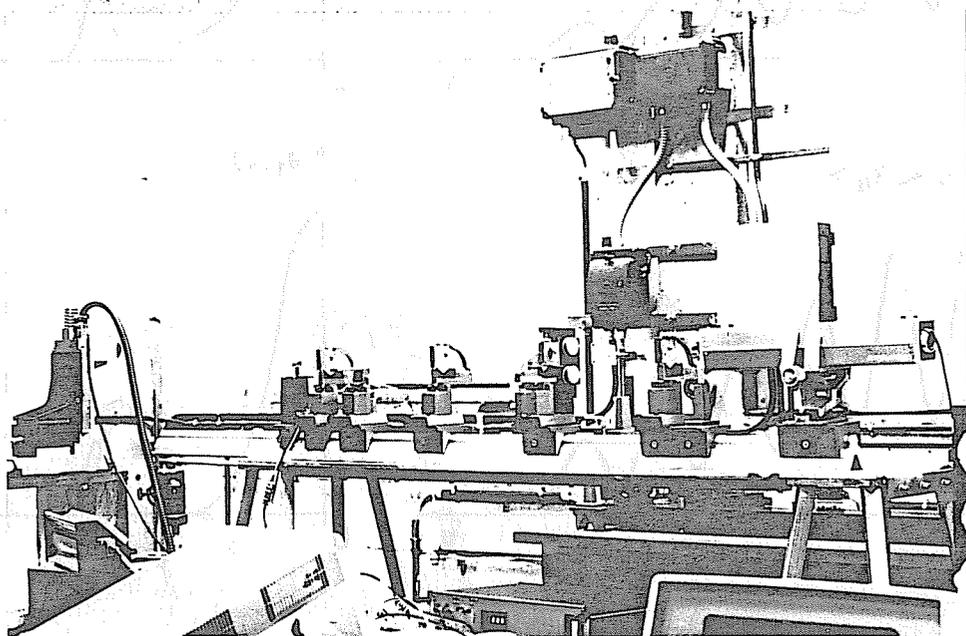


Fig.IV.9. Photographie du montage de la fig.IV.8. A gauche: photodiode et translateur; à droite: le laser.

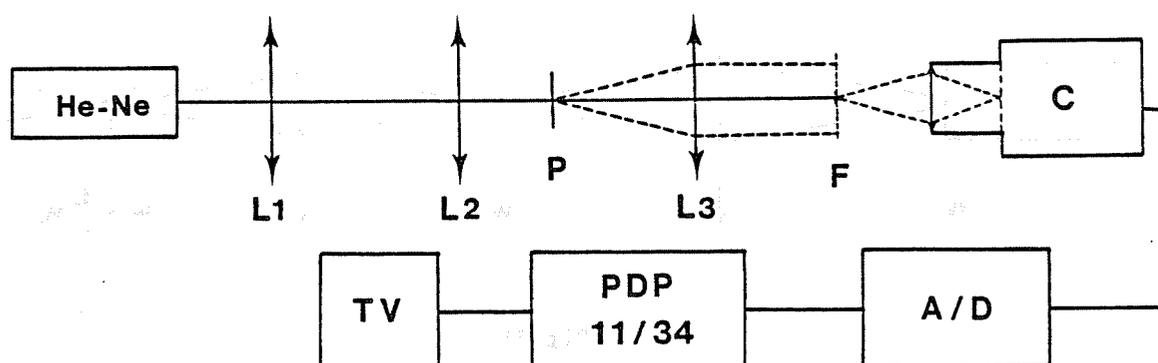


Fig.IV.10a. Montage d' acquisition d' images par camera video.  
 L<sub>1</sub>, L<sub>2</sub>: lentilles d' ajustement du diamètre du faisceau;  
 P: photographie; L<sub>3</sub>: lentille de transformée; F: plan de  
 Fourier avec obstacle; C: caméra à tube vidicon.

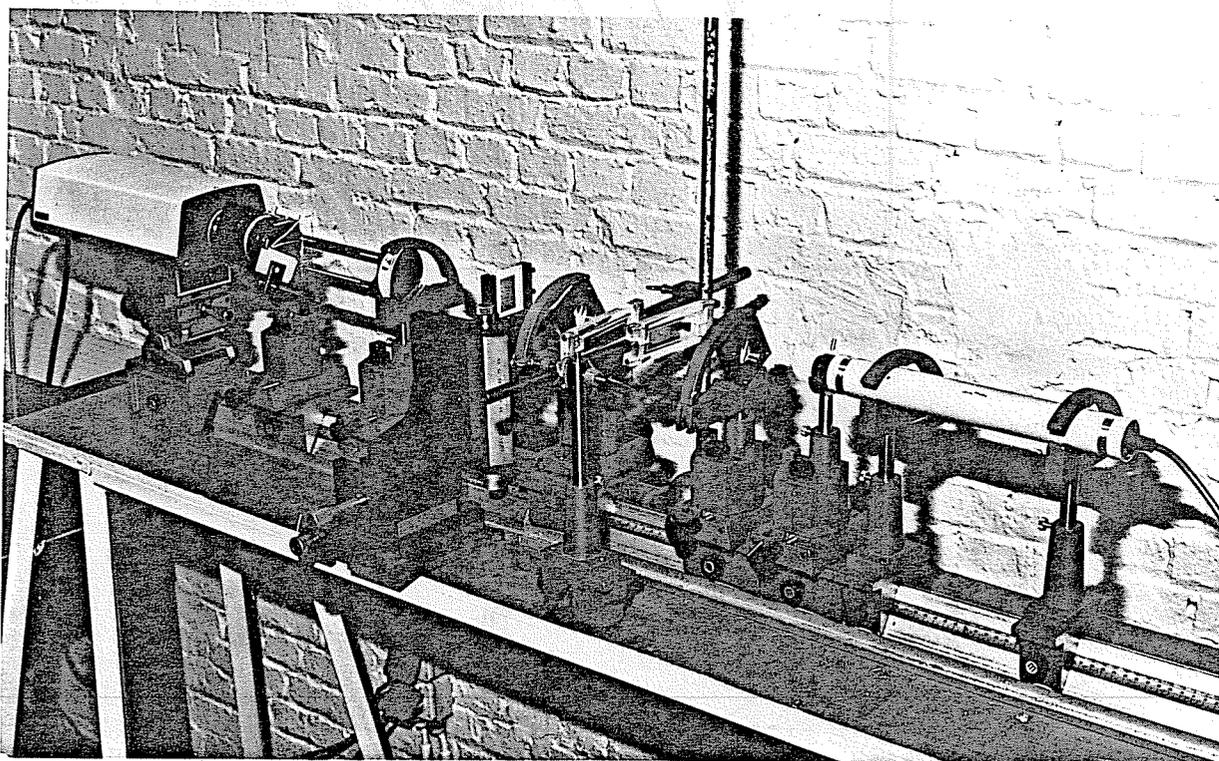


Fig.10b.  
 Photographie du montage de la fig.10a.

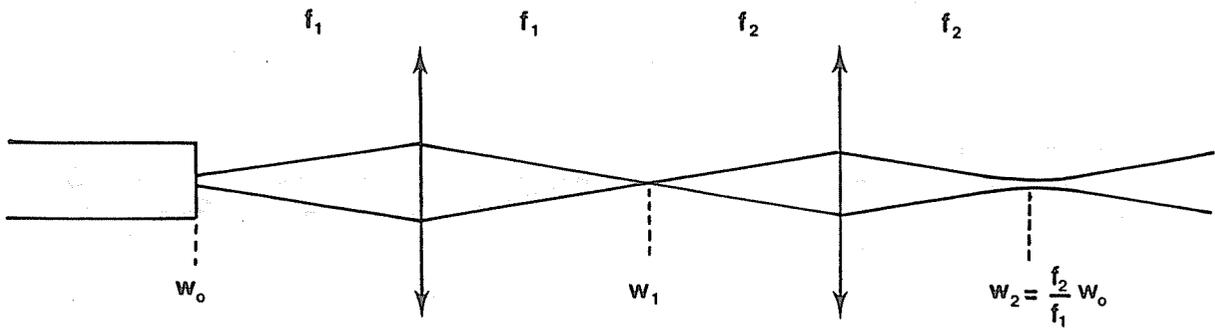


Fig.IV.11.

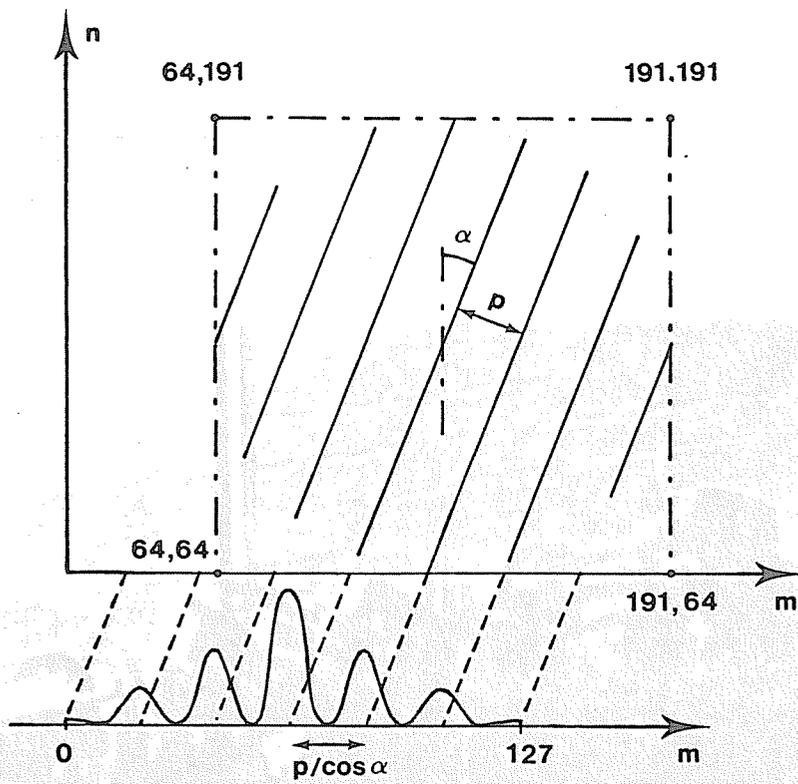


Fig.IV.12. Schéma du moyennage des lignes

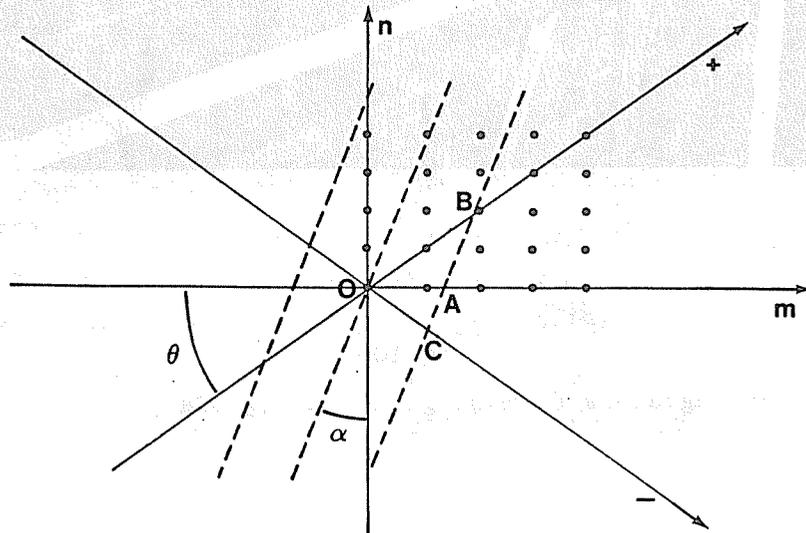


Fig.IV.13.

## CHAPITRE V : APPLICATION A LA MESURE D' ECOULEMENTS A BASSE VITESSE

1. INTRODUCTION : CONVECTION NATURELLE

La mise au point d' une technique de vélocimétrie ne peut se faire qu' en la testant sur des écoulements réels. Plutôt que d' aborder directement un écoulement gazeux instationnaire comme celui du chapitre VI, on a préféré évaluer d' abord les performances de la technique sur des écoulements liquides à basse vitesse particulièrement simples à produire: les écoulements de convection naturelle. Ces écoulements ont le grand avantage d' être confinés et de pouvoir se présenter sous forme compacte. De plus, l' utilisation de fluides assez visqueux permet d' obtenir des faibles vitesses pouvant être mesurées à l' aide de lasers continus découpés. Tous ces éléments permettent de réaliser des expériences simples à monter, trouvant leur place sur une table d' expérience "standard". On trouvera un exposé classique sur la convection dans <sup>156</sup>. Rappelons simplement quelques caractéristiques de ces écoulements:

- On distingue généralement deux types importants de convection dans des enceintes:

.La convection de Bénard dans une couche liquide dont la surface est libre. Ce type de convection est célèbre pour ses cellules hexagonales apparaissant à la surface libre. Notons que le mécanisme de convection est dû au couplage entre contrainte thermique et tension superficielle.

.La convection de Rayleigh-Bénard entre deux plaques conductrices horizontales, la plaque inférieure étant à plus haute température que la plaque supérieure. Nous nous intéresserons tout particulièrement à ce type de convection naturelle.

- La convection de Rayleigh-Benard est une instabilité résultant de la compétition entre plusieurs effets. Par exemple, si nous considérons un fluide soumis à un gradient constant et vertical de température avec la source chaude en bas, l' effet déstabilisant est la force d' Archimède poussant le fluide chaud et léger vers le haut et les effets stabilisants sont la diffusivité thermique du fluide et la viscosité.

- La convection ne s' établit que lorsque les effets déstabilisants sont plus importants que les effets stabilisants, lorsque le nombre de Rayleigh  $R_a$  dépasse une certaine valeur critique  $R_{ac}$ , soit

$$R_a = \frac{\alpha g \Delta T d^3}{\nu \kappa} > R_{ac} \quad , \quad (1)$$

où on a

$\alpha$  : coefficient de dilatation volumique

$g$  : accélération de la gravité

$d$  : épaisseur de la couche de fluide

$\nu$  : viscosité cinématique

et  $\kappa = \lambda / \rho C_p$  : coefficient de diffusité thermique (  $\lambda$ : conductibilité thermique ;  $C_p$ : capacité calorifique )

Pour une enceinte parallépipédique de longueur et profondeur infinies, on a  $R_{ac} = 1707$ . Pour établir cette valeur, il faut faire l' approximation de Boussinesq<sup>156</sup> : toutes les propriétés du fluide, sauf la masse volumique, sont indépendantes de la température.

- Lorsque le gradient de température admet une composante horizontale, les équations de Navier-Stokes n' admettent pas de solution à vitesse identiquement nulle ( seuil inexistant ). L' écoulement convectif démarre dès qu' un faible gradient horizontal s' établit. C' est pourquoi il faut veiller à éliminer les causes de gradient horizontal de température lors de la construction d' une cellule de Rayleigh-Bénard.
- La configuration convective dépend de la géométrie et des propriétés thermiques des parois verticales. Un exemple célèbre est la convection de Rayleigh-Bénard dans une enceinte parallépipédique avec longueur  $\gg$  profondeur  $>$  hauteur. Dans ce cas, aux environs du seuil, on obtient des rouleaux stationnaires de période  $\Lambda \approx 2d$  et d' axes horizontaux parallèles à la plus petite face verticale. Quand la géométrie n' impose pas la direction des rouleaux, ceux-ci peuvent s' imbriquer de manière compliquée tout en gardant les extrémités de leurs axes perpendiculaires aux parois verticales.<sup>160</sup>
- Pour des liquides courants (eau, par exemple), la hauteur de fluide correspondant à une différence critique de température de 1°C est extrêmement faible. Pour pouvoir étudier des mouvements près du seuil, il est donc commode d' utiliser des liquides plus visqueux.
- Les phénomènes de convection ont connu un grand regain d' intérêt lorsque l' on s' est intéressé à leur comportement pour  $R_a \gg R_{ac}$ . Dans des cellules

à grand rapport d' aspect (longueur  $\gg$  profondeur), les rouleaux se déforment et une turbulence dite "de phase" apparaît. Par contre, dans des cellules à faible rapport d' aspect (longueur  $\gtrsim$  profondeur  $\approx$  hauteur) où la déformation du petit nombre de rouleaux est "bloquée" par les parois, un comportement beaucoup plus organisé apparaît. Plusieurs "routes" vers la turbulence sont possibles <sup>159</sup>, dépendant des rapports d' aspect et des caractéristiques du fluide. Citons simplement celle où la vitesse et la température deviennent temporellement périodiques, puis bipériodiques avant de devenir turbulentes. Cette transition vers la turbulence après un nombre réduit d' apparitions de périodicités contredit la description classique de la transition vers la turbulence par l' apparition d' un très grand nombre d' oscillateurs indépendants (Landau <sup>112</sup>) et, semble-t-il, peut être décrite par la théorie des attracteurs étranges <sup>157-159</sup>.

## 2. CONVECTION DE RAYLEIGH - BENARD DANS UNE CELLULE PARALLELIPIPEDIQUE

La première expérience de vélocimétrie <sup>92,93</sup> a utilisé une cellule parallépipédique de rapport d' aspect 16:5:1 dans laquelle la structure convective est composée de rouleaux stationnaires parallèles au petit côté de la cellule. Les parois latérales sont constituées de barreaux de plexiglass et les parois horizontales de plaques de cuivre dans lesquelles circule de l'eau dont la température est régulée (à quelques centièmes de degrés près) dans des bains thermostatés extérieurs (Braun Thermonix). Un système de thermocouples insérés dans les plaques de cuivre permet de mesurer leur différence de température.

Après de nombreux déboires pour obtenir des rouleaux acceptables avec des liquides de faible viscosité, il a été jugé préférable d'utiliser un liquide de forte viscosité pour obtenir une différence critique de température assez élevée. Plutôt que des huiles aux silicones, on a choisi la glycérine qui a le mérite d' être parfaitement soluble dans l' eau, ce qui permet de faire continûment varier la viscosité et d'y introduire très aisément les particules traçantes (sphères de latex livrées en solution aqueuse). Malheureusement

La glycérine est hygroscopique et ses propriétés (surtout la viscosité) dépendent fortement de la proportion d'eau. Les propriétés exactes du mélange sont donc mal connues, ce qui empêche une comparaison précise avec la théorie. En plus, les propriétés de la glycérine varient avec la température, ce qui est contraire à l'hypothèse de Boussinesq des théories classiques<sup>156</sup>.

Retenons simplement quelques ordres de grandeur pour la glycérine pure (vers 20°)

$\mu$  : 14.9 poise: 14.9 g/cm sec

$\rho$  : 1.26 g/cm<sup>3</sup>

$\kappa$  : 9.3 10<sup>-4</sup> cm<sup>2</sup>/sec

$n \approx 1.47$

Le nombre de Prandtl ( $Pr = \frac{\nu}{\kappa}$ ) vaut 1.3 10<sup>4</sup>, ce qui signifie que la diffusion visqueuse est beaucoup plus importante que la diffusion thermique. On remarquera que l'indice de réfraction de la glycérine est proche de celui du verre et du plexiglas, ce qui permet de minimiser les aberrations liées aux parois. Les aberrations se réduisent alors aux aberrations d'un dioptré plan.

Dans notre cas, la différence de température vaut  $\Delta T / \Delta T_c = 1.23$  avec  $\Delta T_c = 8.1^\circ\text{C}$ . Les sphères de latex (Dow Corning; diamètre: 5.8  $\mu\text{m}$ ; densité: 1.05) sont illuminées par un feuillet lumineux (laser Ar<sup>+</sup>: 1W à 5145 Å) parallèle au grand côté de la cellule (distance  $\approx 7.5$  mm) et donc perpendiculaire à l'axe des rouleaux. Le faisceau lumineux est découpé en neuf impulsions de 20 msec séparées par un intervalle constant de 1 sec. Les particules diffusantes sont imagées avec un agrandissement de 1.97 au moyen d'un objectif 50 mm (ouvert à f/3.5) retourné.

La figure V.1 montre la photographie d'un rouleau de convection (une demi-période de mouvement convectif) obtenue dans ces conditions. La figure V 2 montre la composante horizontale de la vitesse mesurée, grâce aux franges de Young produites par éclairage ponctuel, le long d'une horizontale à la hauteur où cette composante horizontale est extrémale ( $z \approx 0.75d$ , entre les points A et B sur la figure V.1). Le diamètre du faisceau d'éclairage est de 0.7 mm, ce qui correspond, compte tenu de l'agrandissement de la photographie, à une zone de mesure de 0.35 mm de diamètre.

Les franges ont été analysées visuellement en mesurant la distance à l'axe de la frange la plus éloignée et en divisant cette longueur par l'ordre de la frange considérée. Si  $\alpha$  est l'angle entre la vitesse et l'axe x, on a

$$v_x = v \cos \alpha$$

$$\text{et } \frac{\Delta v_x}{v_x} = \frac{\Delta v}{v} + \Delta \alpha \operatorname{tg} \alpha$$

Avec  $\Delta \alpha = 1^\circ$  et 2 mm d'incertitude sur la position de la frange extrême (entre 30 et 50 mm), on obtient les croix d'erreurs de la fig.V.2.

Malgré le mode encore "rustique" d'analyse des franges, les mesures constituent une bonne approximation d'une fonction sinusoïdale de période  $\Lambda \approx 2d$ , ainsi que le prévoit la théorie linéaire.<sup>156</sup> Ce fait est remarquable et montre la "stabilité" de ce genre de système, même si les conditions expérimentales sont mal contrôlées.

La figure V.3 montre des franges isovitesse obtenues par filtrage spatial au moyen du dispositif de la fig.II.6. L'avantage de ce mode de dépouillement apparaît tout de suite, les franges isovitesse permettant de quantifier instantanément l'ensemble de l'écoulement. Comme souligné au chapitre IV, l'observation et le repérage des franges est facilité par leur mouvement quand le trou de filtrage est déplacé. Notons néanmoins deux inconvénients de la technique:

- L'obtention de photographies comme celles de la figure V.3. n'est pas immédiate. A cause d'un bruit de fond assez important, il est nécessaire d'augmenter le contraste des franges en les enregistrant sur une émulsion à haut contraste. Une amélioration possible de ce traitement tâtonnant consiste à modifier numériquement le contraste en enregistrant et traitant les images filtrées au moyen du système d'analyse d'images décrit au § IV.1.4.2. On en verra un exemple d'application au chapitre VI ( § VI.3.2.2 ).

- S'il est facile d'assigner un ordre aux franges, il est impossible de déterminer le signe de la composante de vitesse mesurée. Le plus souvent, la comparaison des franges avec l'image originale et l'observation des traces des particules sur celle-ci permet de déterminer le signe relatif de la composante de vitesse (voir les figs. V.1 et V.2).

### 3. CONVECTION DE RAYLEIGH - BENARD DANS UNE CELLULE CYLINDRIQUE

L'expérience décrite au V.2 était encore assez fruste et n'a servi qu'à étudier la "faisabilité" de la méthode. Elle a pu mettre en évidence la possibilité d'obtenir des franges d'égale vitesse, ce qui n'avait jamais été fait en mécanique des fluides, mais a surtout révélé l'absolue nécessité d'automatiser (ou tout du moins de semi-automatiser) la mesure des franges de Young obtenues par éclairage localisé.

C'est pour cette raison que le montage d'analyse d'image décrit au IV.1.4.1 a été conçu et construit et qu'une nouvelle expérience permettant d'obtenir des clichés de meilleure qualité a été réalisée<sup>94,95</sup>.

Le défaut majeur de l'expérience décrite au V.2 réside dans la limitation du champ (10mm x 10mm), enregistré à un grandissement d'environ deux avec un objectif non conçu pour cet usage. Pour remédier à ce défaut, on a utilisé une cellule à paroi cylindrique schématisée à la figure V.4. Le rapport d'aspect ( $\gamma = \text{hauteur/diamètre}$ ) vaut 0.5 pour un diamètre de 50mm et la cellule est contenue dans une enceinte parallélépipédique contenant le même liquide (glycérine) que la cellule proprement dite. Ceci permet d'éviter l'effet de dioptré cylindrique associé à la cellule interne. Seules restent les aberrations d'un dioptré plan. Le fonctionnement de cette cellule est identique à celui de la cellule de V.2. La température des plaques de cuivre est régulée à quelques centièmes de degrés près par des circulations d'eau thermostatisée. La différence de température est mesurée grâce à des thermocouples isolés insérés dans les blocs de cuivre (photo du montage à la fig.V.5).

La configuration convective d'une cellule cylindrique de faible rapport d'aspect est beaucoup moins bien définie que pour une cellule parallélépipédique. En effet, les rouleaux ont tendance à se terminer perpendiculairement aux parois. Notons que ces parois peuvent, dans certains cas, imposer la configuration. Si par exemple, à l'état sous-critique, la résistance thermique entre les plaques chauffantes et les parois verticales y induit une répartition de température différente de celle du fluide, ce gradient horizontal de température va provoquer une convection sous-critique près des parois, ce qui impose une configuration axisymétrique, même pour les grands rapports d'aspect<sup>161</sup>.

Par contre, pour les rapports d'aspect proches de l'unité, l'expérience et la théorie montrent<sup>161,162</sup> que la configuration axisymétrique est stable.

Manifestement, le cylindre avec  $\gamma = 0.5$  est "taillé" pour un rouleau axisymétrique.

La cellule de la figure V.4 est optimisée pour ses qualités optiques et non thermiques, les conditions aux limites thermiques à la paroi verticale étant particulièrement mal connues et mal contrôlées. Pour les deux raisons citées plus haut (défauts à la paroi verticale et rapport d'aspect favorable), la configuration convective est axisymétrique (un rouleau torique), mais perturbée comme nous allons le voir.

La figure V7a montre l'écoulement illuminé au moyen d'une tranche lumineuse passant par l'axe de la cellule. L'écoulement est stationnaire à  $\Delta T / \Delta T_c = 1.66$  pour une différence critique de  $\Delta T_c \approx 1.8^\circ\text{C}$ . L'axisymétrie de l'écoulement a pu être vérifiée en déplaçant le feuillet lumineux d'avant en arrière le long de la ligne de vue. On a pu vérifier ainsi que "l'axe neutre" (ligne reliant les points à vitesse nulle) est bien un anneau.

Les particules (sphères de latex de diamètre  $5.8 \mu\text{m}$ ) sont illuminées par une séquence de 10 impulsions de 20 msec séparées par un intervalle constant de 3 sec (puissance du laser: 1.7 W à  $5145 \text{ \AA}$ ). L'agrandissement de la photo vaut 0.66 pour une ouverture f/5.6 ( focale: 50mm ).

Une série de 19 images de franges de Young ont été enregistrées au moyen du montage du IV 1.4.1 le long d'une ligne horizontale passant par les deux points de stagnation de l'écoulement (voir figure V.7a). La raison de ce choix réside dans le fait que la vitesse est verticale le long de cette ligne, ce qui permet de rechercher directement la période des franges sans se soucier de leur orientation. C'est grâce à ces franges numérisées que les algorithmes décrits au IV.1.3 ont pu être mis au point.

La figure V.6 montre la vitesse verticale mesurée le long de cette ligne horizontale. La mesure a été effectuée au moyen de la technique de moyennage du IV.1.3.1.3 ( technique du "logarithme" ) qui donne de très bons résultats dans ce cas, comme expliqué au IV.1.3.1.3 . La figure III.5 représente le traitement des franges de Young correspondant à un des points de la courbe de la figure IV.6. La mesure automatique par ordinateur a pour conséquence une erreur de mesure plus faible qu'à la figure V.3. Cette erreur ( moyenne! soulignons-le encore) correspondant à une imprécision de  $2.5 \mu\text{m}$  sur le déplacement est symbolisée par une croix d'erreur isolée sur la figure V.3 .

Deux faits importants apparaissent à l'examen de la figure V.6 :

- D'un point de vue instrumental, l'efficacité de la technique de moyennage permet de mesurer des déplacements sur la photo aussi faibles que  $20\mu\text{m}$ , ce qui donne une bonne dynamique (déplacement maximum:  $180\mu\text{m}$ , dynamique: 9/1 )
- D'un point de vue physique, la vitesse ascendante près de l'axe est beaucoup plus importante que près de la paroi. Cet effet est évidemment lié à la forme torique du rouleau de convection. Si l'écoulement était parfaitement axisymétrique, il faudrait

$$2\pi \int_0^R v_z(r) r dr = 0 \quad (2)$$

En effectuant ce calcul, on s'aperçoit qu'il existe un déficit de débit non négligeable en faveur des vitesses ascendantes. C'est un signe indéniable de tridimensionnalité de l'écoulement, ce dont on pouvait se douter en remarquant la disymétrie de la figure V.6. Le très mauvais comportement thermique de la paroi verticale est sans aucun doute responsable de la déformation du rouleau torique.

On peut vérifier sur les courbes d'égalité de composante de vitesse (figure V.7; photographie à haut contraste) que ce déficit de débit n'est pas un artefact des techniques d'analyse numérique des franges de Young. En effet, on ne voit apparaître de franges dans la région de vitesse négative que quand il y a quatre franges dans la région de vitesse verticale positive. (Fig.VII.d). Ceci signifie que le rapport des extrema de vitesse dans les deux régions est situé entre quatre et cinq, ce qui se vérifie bien sur la figure V.6.

Notons encore que le signe de la vitesse (ascendante sur l'axe) ne peut absolument pas être déduit de la photographie de l'écoulement (Fig.V7a). Le sens du mouvement a été déterminé indépendamment par l'observation du lent mouvement des particules dans l'écoulement originel.

On peut remarquer que l'optimisation de la qualité de la photographie et l'emploi de la multiple exposition pour améliorer le rapport signal sur bruit (voir le § IV.2) permet d'obtenir un nombre important de franges isovitesse de bonne qualité. C'est là l'apport principal de cette expérience qui, en outre, a permis la mise au point des techniques d'analyse des franges de Young qui seront illustrées de manière plus complète au chapitre suivant.

#### 4. CONCLUSION

Les enseignements que l'on peut tirer de ces expériences simples de convection sont de trois ordres:

- Ces expériences ont permis de tester la méthode de vélocimétrie sur des cas simples et de mettre au point les techniques d'enregistrement et d'analyse numérique des images.
- La possibilité d'éclairer ces écoulements par un grand nombre d'impulsions lumineuses consécutives a permis de révéler l'effet bénéfique de l'exposition multiple. L'amélioration du rapport signal/bruit dû à l'affinement des franges permet d'augmenter la dynamique de mesure lors de l'analyse point-par-point et d'obtenir un grand nombre de franges isovitesse bien définies lors de l'analyse par filtrage spatial.
- Enfin, il faut rappeler que les techniques de mesure utilisées en convection sont généralement l'interférométrie et la vélocimétrie Doppler. La première technique ne permet de mesurer que des fluctuations d'indice de réfraction intégrées le long du chemin optique, tandis que la deuxième donne accès à l'évolution temporelle de la vitesse en un point. Malgré leur côté un peu fruste, les expériences décrites dans ce chapitre montrent que la vélocimétrie de speckle peut se poser en candidat sérieux pour compléter les techniques classiques lorsque le comportement spatial des configurations convectives doit être étudié.

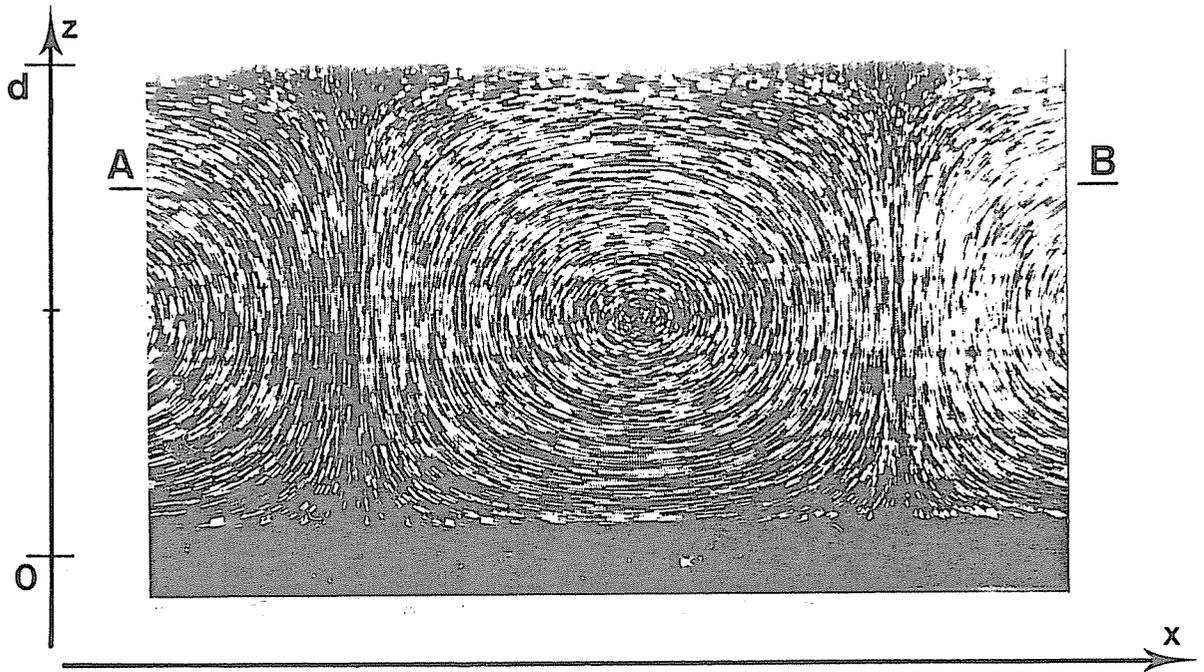


Fig. V.1. Photographie en multiple exposition d'un rouleau de convection de Rayleigh-Bénard dans une cellule parallélépipédique. La hauteur ( $d$ ) de la cellule vaut 1 cm.

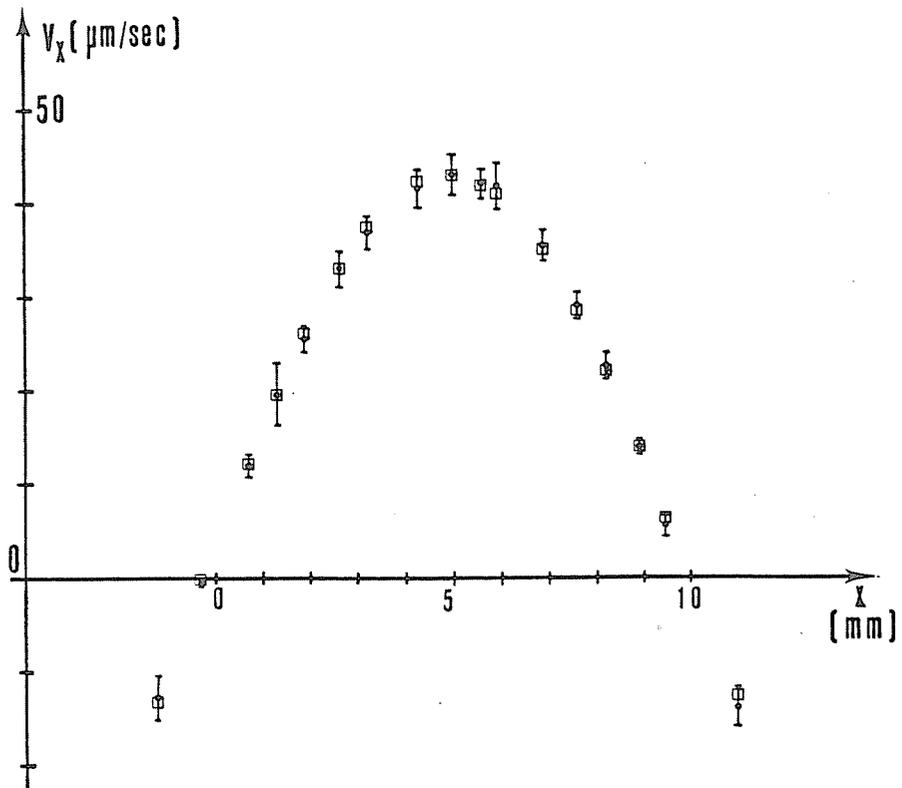


Fig. V.2. Profil de vitesse mesuré à  $z/d \approx 0.75$ . Les  $\bullet$  symbolisent les points expérimentaux et les  $\square$  sont des points d'une sinusoïde.

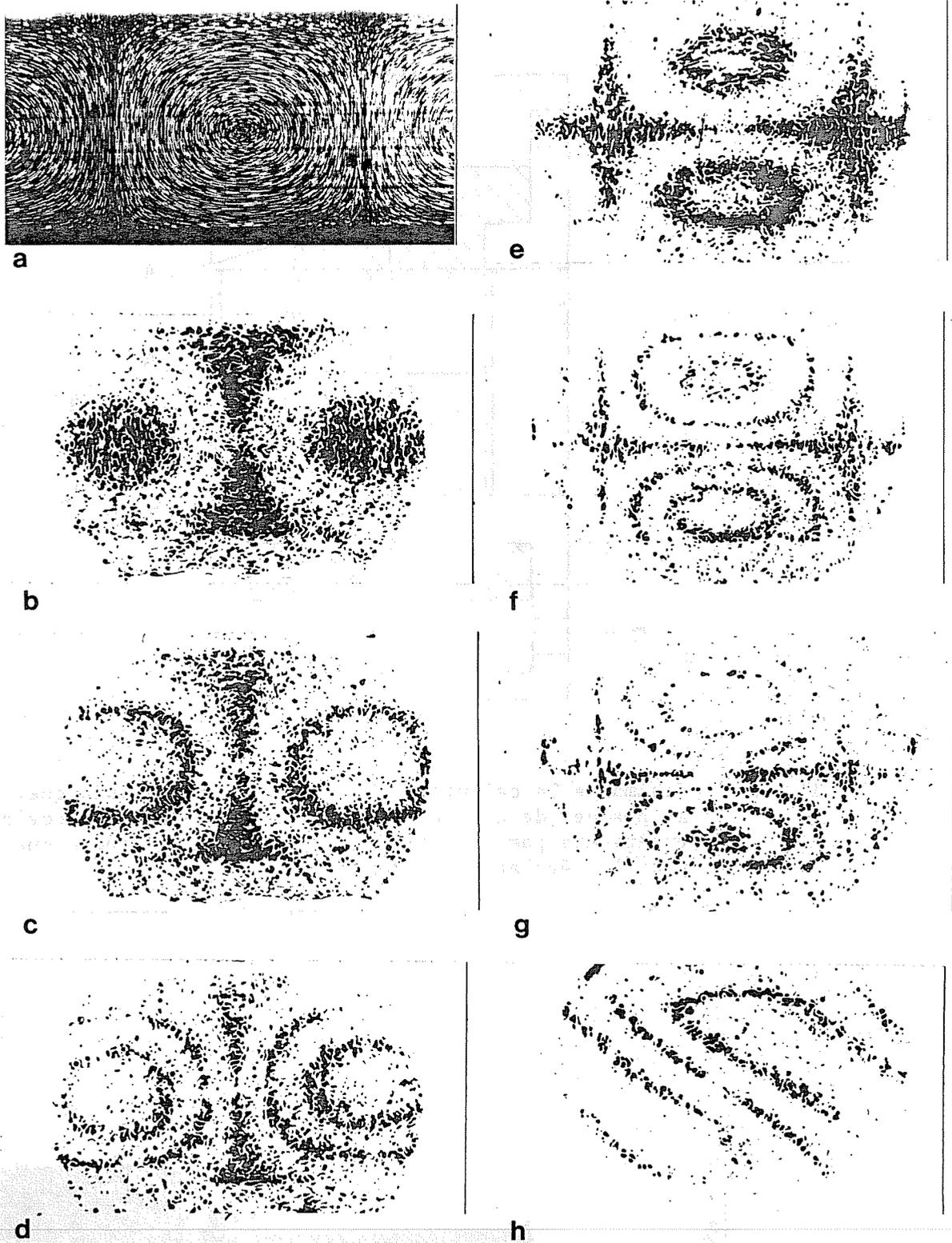


Fig. V.3. Lignes isovitesse obtenues par filtrage spatial. Les photos sont imprimées en négatif en utilisant des films et papier à haut contraste.

a: photo originale identique à celle de la fig. V.I.

b:  $\Delta v_z = 48.3 \mu\text{m/s}$  ; c:  $\Delta v_z = 31.6 \mu\text{m/s}$  ; d:  $\Delta v_z = 19.9 \mu\text{m/s}$  ;

e:  $\Delta v_x = 35.7 \mu\text{m/s}$  ; f:  $\Delta v_x = 19.5 \mu\text{m/s}$  ; g:  $\Delta v_x = 16.0 \mu\text{m/s}$  ;

h:  $\Delta v_x = \Delta v_z = 35.7 \mu\text{m/s}$ .

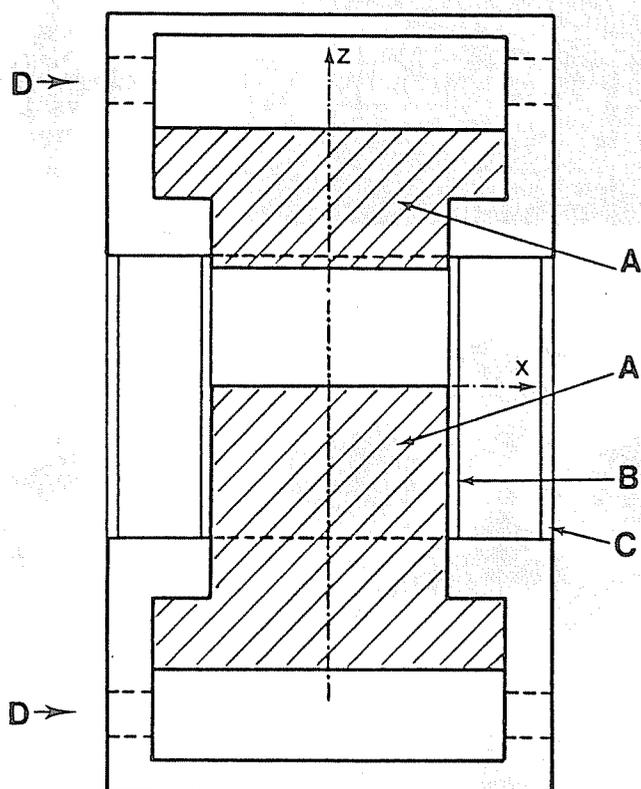


Fig.V.4. Schéma de la cellule de Rayleigh-Bénard cylindrique.  
 A: plaques de cuivre; B: cylindre de pyrex; C: enceinte extérieure parallélépipédique (verre); D: écoulements d'eau pour la régulation de température.

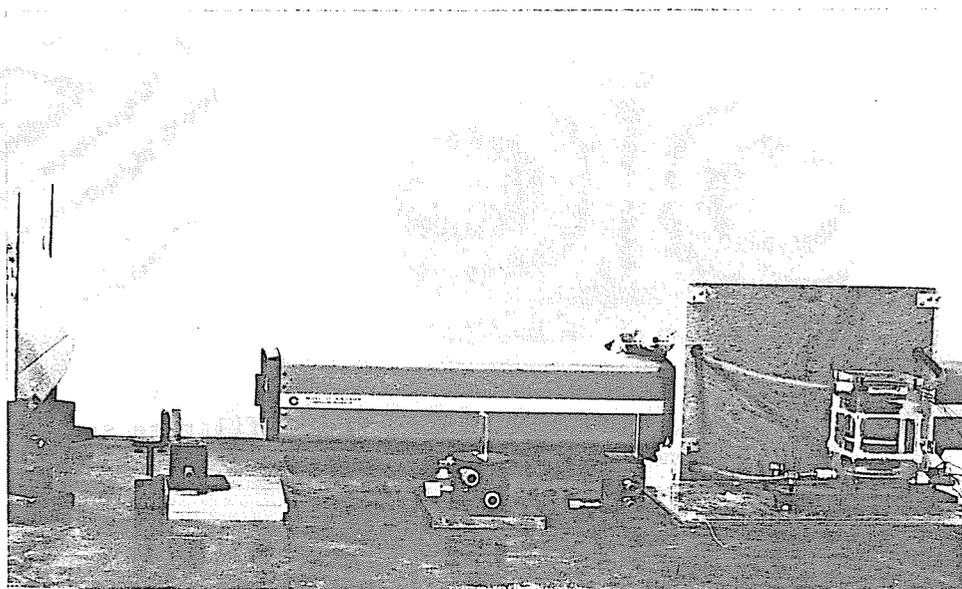


Fig.V.5. Photographie du montage expérimental. À gauche, entre deux miroirs de renvoi: la roue dentée servant à la modulation du faisceau; à droite: la cellule et ses conduites d'amenée d'eau à température régulée.

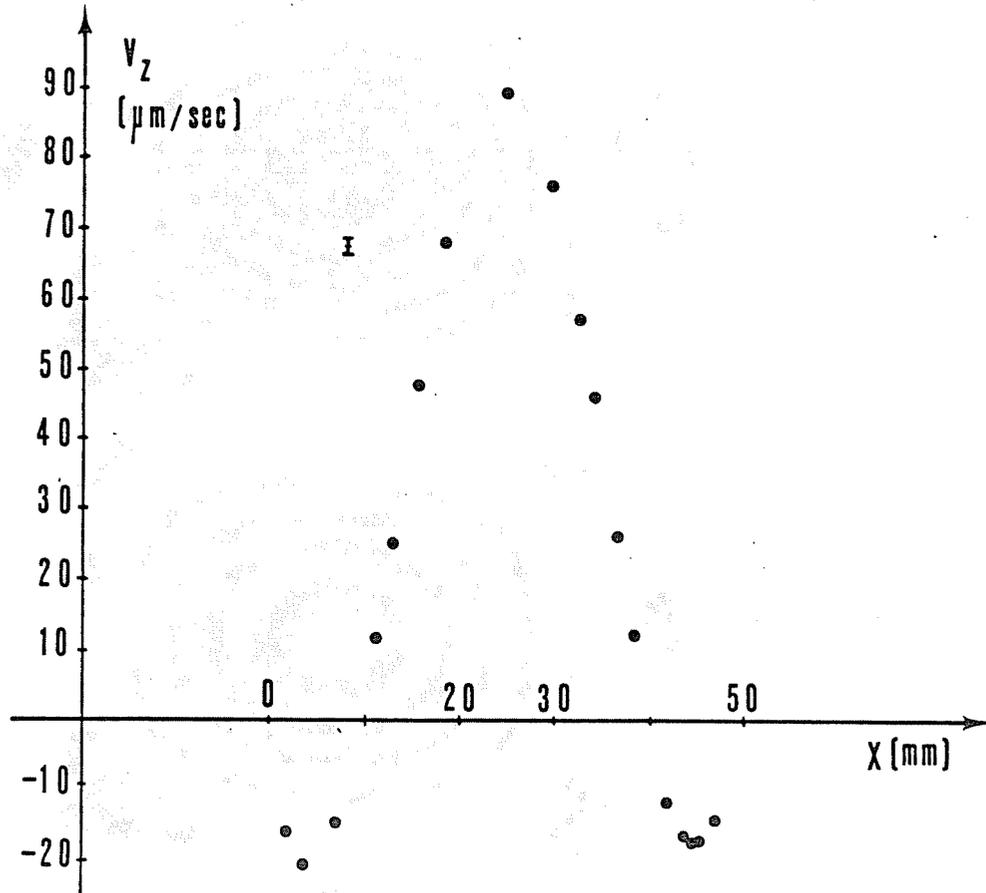
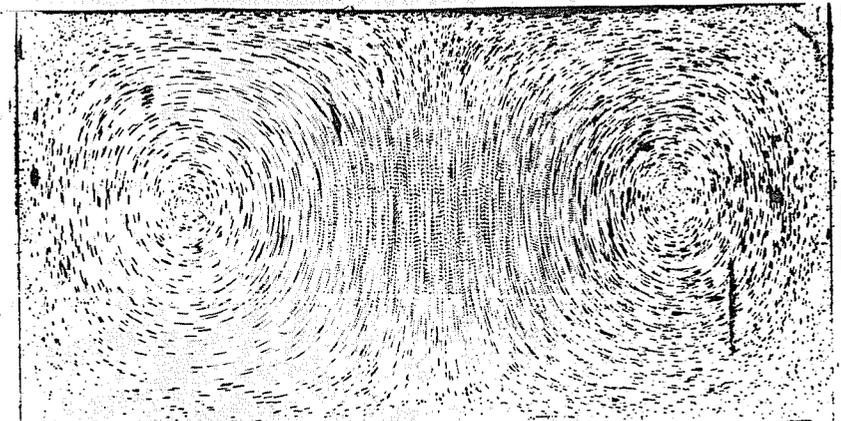
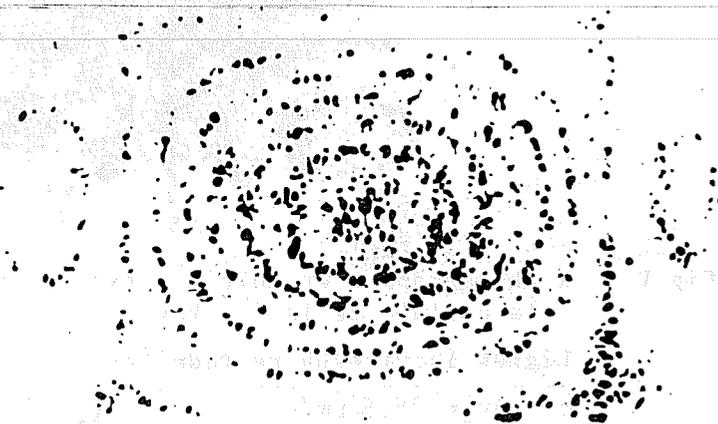


Fig.V.6. Profil de vitesse mesuré à  $z/d=0.5$  (mi-hauteur;  $d$  : hauteur de la cellule)  
 Noter la croix d'erreur isolée.



a



b

Fig.V.7 voir la légende page suivante

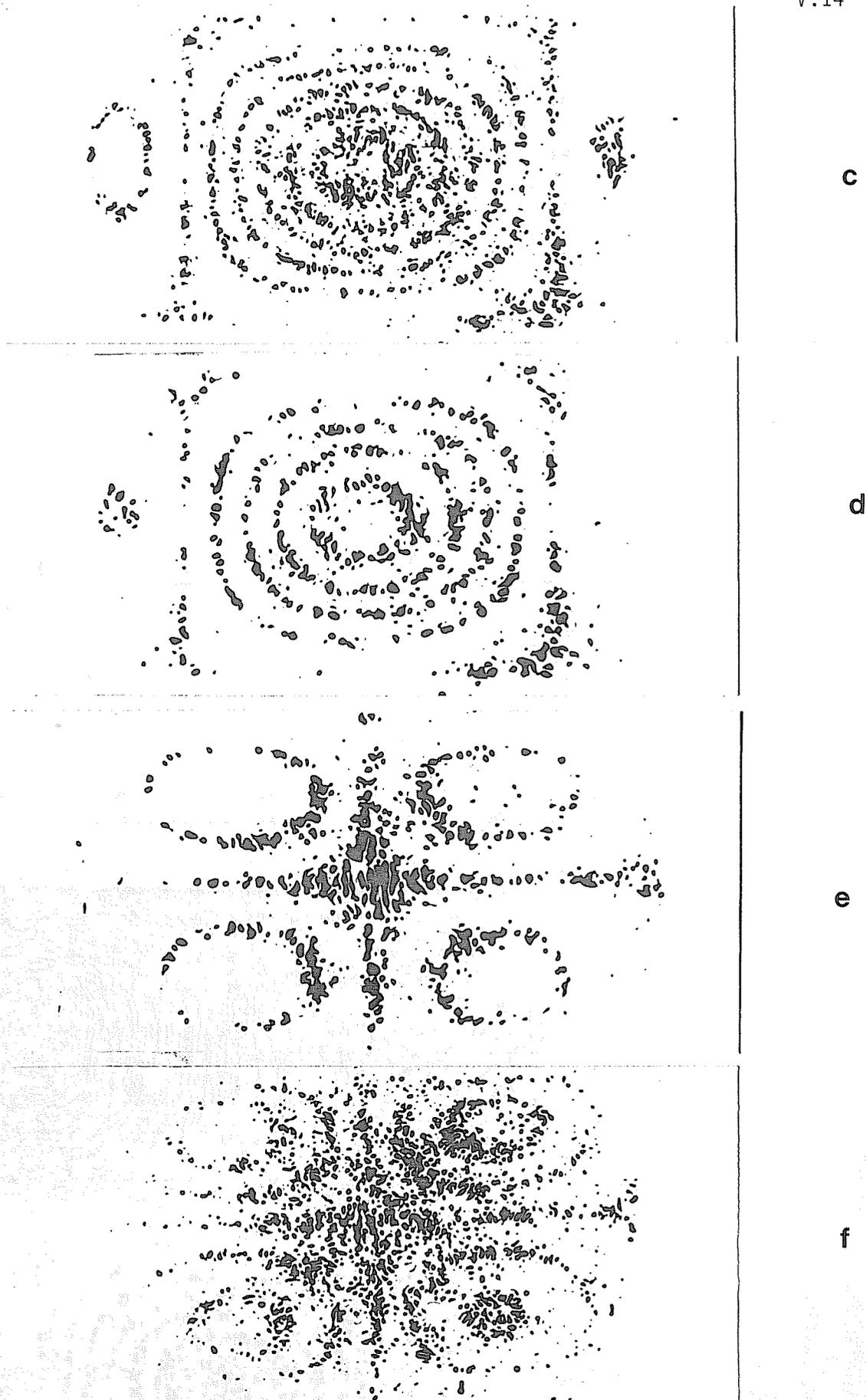


Fig.V.7. a-Photographie en multiple exposition de l'écoulement dans la cellule de la fig.V.4.

Lignes isovitesse reproduites en négatif (haut contraste):

b-  $\Delta v_z = 15.5 \mu\text{m/s}$  ; c-  $\Delta v_z = 16.8 \mu\text{m/s}$  ; d-  $\Delta v_z = 20.6 \mu\text{m/s}$  ;  
 e-  $\Delta v_x = 18.8 \mu\text{m/s}$  ; f-  $\Delta v_x = 13.1 \mu\text{m/s}$ .